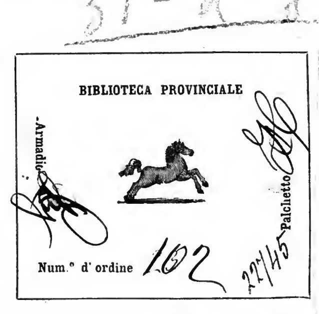
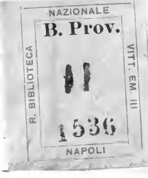
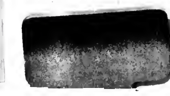

VITTORIO EM. III


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine 102
22/45


NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
1536
NAPOLI



GÉOMÉTRIE

DESCRIPTIVE.





H. REMY, IMPRIMEUR DU ROI.

GÉOMÉTRIE

DESCRIPTIVE,

PAR G. MONGE.

SIXIÈME ÉDITION,

AUGMENTÉE D'UNE

THÉORIE DES OMBRES ET DE LA PERSPECTIVE,

EXTRAITE DES PAPIERS DE L'AUTEUR,

PAR M. BRISSON,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INGÉNIEUR DIVISIONNAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES.







BRUXELLES,

Ve P. J. DE MAT, A LA LIBRAIRIE NATIONALE ET ÉTRANGÈRE, RUE DE LA BATTERIE, No 163.

1834.





AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

Ce Traité de *Géométrie descriptive* a été composé pour l'usage des Élèves de la première École normale, créée par une loi du 9 brumaire an III (30 octobre 1794).

Cette École, qui n'a subsisté que pendant les quatre premiers mois de l'année 1795, et qui était destinée à régénérer l'instruction publique, anéantie en France sous le règne de la terreur, comptait quinze cents Élèves pris dans tous les départemens, parmi les instituteurs et les hommes cultivant les Sciences et les Lettres; elle avait pour professeurs

MM. Lagrange. . . . . . . Laplace.	pour les Mathématiques,
Monge	pour la Géométrie descriptive,
Haüy.	pour la Physique,
Berthollet	pour la Chimie,
Daubenton	pour l'Histoire naturelle,
Thouin	pour l'Agriculture,
Buache. . . . . Mentelle . . . . Volney	pour la Gréographie et l'Histoire.
Laharpe. . . . . Garat . . . . Bernardin-de-St-Pierre. . Sicard	pour la Grammaire, la Littérature et la Morale.

MM. Lacroix et Hachette étaient Professeurs-

Adjoints pour la *Géométrie descriptive*. Les leçons orale sur cette science se donnaient, ainsi que pour les autres parties de l'enseignement, à l'amphithéâtre du Jardin des Plantes. On avait disposé, dans les bâtimens de la Sorbonne, de grandes salles de dessin, où les Élèves de l'Ecole normale étaient exercés aux constructions graphiques.

Cette nouvelle édition des leçons de Géométrie descriptive renferme, de plus que les précédentes, l'extrait de trois leçons inédites, contenant les principes de la Théorie des ombres et de la Perspective, sujet annoncé dans le programme. M. Brisson, Inspecteur divisionnaire chef des Ponts-et-Chaussées, ancien Élève de l'École Polytechnique, auteur de cet extrait, a exposé son but et sa marche dans une Lettre dont on va lire quelques fragmens.

« Dans les papiers laissés par M. Monge, et » dont Mme Monge a bien voulu me confier le » dépouillement et l'examen, se trouvent les Leçons » données à l'École normale et recueillies par les » sténographes. Il y en a quatre qui n'ont point » été imprimées, savoir : une sur la détermina- » tion géométrique des ombres, une sur l'appré- » ciation des teintes ou la Perspective aérienne, » une sur la Perspective linéaire, et une der- » nière qui ne contient que des réflexions gé- » nérales sur l'avantage de l'introduction de la » Géométrie descriptive dans l'instruction publi-

» que. Je crois que l'impression des trois premières de ces Leçons serait un véritable service rendu aux jeunes gens.

» Comme elles ont toute la négligence de rédaction que comportent des leçons verbales, recueillies par des personnes qui n'entendaient pas la matière, je me suis occupé du soin de les rétablir, et, en quelque sorte, de les refaire. Je crois n'avoir rien omis d'essentiel; mais je me suis permis quelques changemens dont il est bon que je prévienne. Dans ces leçons, Monge parle de la partie physique de la détermination des ombres et de la perspective aérienne immédiatement après la construction graphique des ombres et avant la perspective linéaire; j'ai suivi un ordre inverse, en renvoyant la partie physique des ombres après la perspective linéaire.

» J'ai donné plus de développement à la théorie des ombres, dans le cas où le corps lumineux a des dimensions finies. J'en déduis, pour le cas où le corps éclairant est le soleil, une détermination de la largeur des pénombres, soit sur le corps éclairé, soit sur le plan qui reçoit l'ombre.

» Dans la perspective, j'ai ajouté tout ce qui se rapporte au cas où le tableau est courbe; et l'invention des panoramas, quoique postérieure aux Leçons de Monge, m'a paru mériter qu'on en dît un mot. J'ai aussi proposé, pour résoudre

» le problème général de la perspective, de con-
» cevoir deux plans passant à la fois par l'œil et
» par le point à mettre en perspective; l'intersec-
» tion de ces deux plans contenant le rayon vi-
» suel, il ne s'agit que de construire leurs traces
» sur le tableau.

» Dans la troisième partie, je suis entré aussi
» dans quelques détails sur la manière dont la lu-
» mière se distribue sur les surfaces des corps
» opaques mats, et en est renvoyée à l'œil. Monge
» ne dit rien là-dessus, mais le premier cahier du
» *Journal de l'École Polytechnique* renferme un
» Mémoire sur la détermination des teintes, où ce
» sujet est traité; cependant j'arrive à un résultat
» différent de celui auquel se sont arrêtés ceux de
» mes anciens camarades qui ont rédigé le Mémoire
» cité (1). » Mais toute cette théorie tient à des
lois plus compliquées, qu'il faut chercher dans les
Traités d'Optique et de *Photométrie*, où sont rap-

(1) « Quelques-uns d'entre eux (dit M. Brisson, dans sa
» *Notice historique sur Gaspard Monge*) avaient recherché,
» par l'analyse, les courbes d'égales teintes sur la surface
» d'une sphère non polie; l'un d'eux se chargea de dessi-
» ner en secret une sphère, en disposant les teintes du lavis
» d'après les résultats du calcul : l'image étant parfaite,
» sitôt qu'elle fut achevée on la plaça sous les yeux de
» Monge. Il est difficile de se faire une idée du moment de
» bonheur qu'il éprouva; vingt ans après il ne pouvait en
» parler sans émotion. »

portées les nouvelles découvertes sur la marche de la lumière dans le voisinage des corps; aussi l'auteur ne la présente-t-il que comme un essai (*voy*. p. 174). ..

A la dernière édition, se trouvait joint un supplément donné par M. Hachette, et concernant principalement les surfaces gauches; on ne l'a pas reproduit ici, pour ne pas trop grossir le volume, et parce qu'on peut se le procurer à part.

MM. Brisson et Dupin, deux des Élèves de Monge les plus distingués, se sont empressés de payer à la mémoire de leur illustre maître un juste tribut de reconnaissance : nous placerons ici quelques fragmens de l'écrit de M. Dupin, déjà recueillis par M. Delambre dans son *Analyse des travaux de l'Académie des Sciences pendant l'année* 1818 (1).

« Disons hardiment que de tels hommes font honneur à la société... Honorons-les pendant leur vie; et quand la mort nous les enlève, accr dons sans hésiter à leurs mânes le tribut de nos éloges, de nos regrets et de notre vénération. Si nous osons entreprendre cette tâche, ce n'est pas pour donner un juste mais stérile éloge à d'illustres concep-

---

(1) *Notice historique sur Gaspard Monge* et *Essai historique sur les Services et les Travaux scientifiques de Gaspard Monge.*



tions et aux fatigues d'une vie consacrée à les réaliser par des institutions utiles à la patrie ; c'est pour propager les idées d'un esprit supérieur, c'est pour consolider l'empire des vérités qui lui sont dues.

» G. Monge naquit à Beaune en 1746... Ses progrès méritèrent qu'on le chargeât de professer, au collége de Lyon, la Physique qu'il venait d'y apprendre l'année précédente... Étant venu à Beaune au temps des vacances, il entreprit de lever le plan de cette ville. Il n'avait pas d'instrumens pour cette opération, il en composa. Il fit hommage de son travail à l'administration de sa ville natale, qui récompensa le jeune auteur aussi généreusement que pouvaient le permettre les moyens bornés de la richesse communale. Un lieutenant-colonel du génie militaire, qui se trouvait alors à Beaune, obtint que Monge fût attaché comme dessinateur et comme élève à l'École d'appareilleurs et de conducteurs des travaux de fortifications. Comme il dessinait avec une rare perfection, on considérait uniquement son talent manuel. Il sentait déjà sa force, et ne pouvait sans indignation songer à l'estime exclusive qu'on accordait à ses dispositions mécaniques. « J'étais » mille fois tenté, disait-il long-temps après, de » déchirer mes dessins, par dépit du cas qu'on » en faisait, comme si je n'eusse pas été bon à » produire autre chose. » Le directeur de l'école le chargea des calculs pratiques d'un cas particu-

lier de *défilement*, opération qui sert à combiner le relief et le tracé des fortifications avec le moins de frais possibles, et de manière que le défenseur s'y trouve à l'abri des coups de l'assaillant. Monge abandonna la route suivi jusqu'alors, et découvrit la première méthode géométrique et générale qu'on ait donnée pour cette importante opération. En appliquant successivement son talent mathématique à diverses questions d'un genre analogue, et généralisant toujours ses moyens de concevoir et d'opérer, il parvint à former un corps de doctrine; ce fut sa Géométrie descriptive... Pendant plus de vingt ans, il lui fut impossible de faire enseigner au corps de Mézières l'application de sa Géométrie aux tracés de la charpente. Il fut plus heureux pour l'application à la coupe des pierres; il suivit avec soin les méthodes employées à cette étude, et les perfectionna en les simplifiant par sa Géométrie...

» Ses travaux scientifiques le firent nommer répétiteur de Mathématiques et de Physique, pour suppléer Nollet et Bossut; ensuite il fut nommé professeur titulaire : alors il tourna ses vues vers l'étude d'une foule de phénomènes de la nature; il fit de nombreuses expériences sur l'électricité; il expliqua les phénomènes qui se rapportent à la capillarité, fut le créateur d'un système ingénieux de Météorologie; il opéra la composition de l'eau; il arriva à cette grande découverte sans avoir eu

connaissance des recherches un peu antérieures de Lavoisier, Laplace et Cavendish. Il ne se contentait pas d'expliquer aux élèves, dans les salles d'études, les théories de la science et leurs applications; il aimait à conduire ses disciples partout où les phénomènes de la nature et les travaux de l'art pouvaient rendre sensibles et intéressantes ces applications. Il communiquait à ses disciples son ardeur et son enthousiasme, et changeait en plaisirs passionnés des observations et des recherches qui, dans l'enceinte d'une salle et par des considérations abstraites, n'eussent paru qu'une pénible étude.

» En 1780, afin d'attirer Monge à Paris, on l'adjoignit à Bossut, professeur du cours d'Hydrodynamique institué par Turgot. Pour concilier les devoirs des deux places qu'il remplissait, il passait six mois de l'année à Mézières et six mois à Paris. La même année il fut reçu à l'Académie des Sciences; et à la mort de Bezout, en 1783, il fut choisi pour remplacer ce célèbre examinateur de la Marine. Plus d'une fois le marquis de Castries invita Monge à récrire le Cours élémentaire de Mathématiques pour les élèves de la Marine; mais toujours Monge s'en défendit. « Bezout a » laissé, disait-il, une veuve qui n'a d'autre for» tune que les écrits de son mari, et je ne veux » point arracher le pain à l'épouse d'un homme qui » a rendu des services importans à la science et à

» la patrie. » Le seul écrit élémentaire que Monge publia fut son Traité de Statique ; et, à quelques passages près, où l'évidence supplée à ce qu'on pourrait désirer d'une plus grande rigueur, la Statique de Monge est un modèle de logique, de clarté et de simplicité.

» A une époque où les malheurs publics appelaient dans les rangs supérieurs tous les talens utiles et courageux au secours de la patrie menacée d'une invasion, Monge fut créé ministre de la Marine. Il fit tout pour conserver à la France les hommes recommandables par leur mérite ou leur bravoure ; il descendit jusqu'à la prière, pour obtenir de Borda la continuation de ses services, et il eut le bonheur de réussir. Il fut un des hommes les plus actifs dans les travaux de la science pour le salut de l'état. On lui dut la construction des nouvelles machines à broyer qu'on établit dans la poudrière de Grenelle, et des foreries établies sur des bateaux de la Seine. Il passait les jours à donner l'instruction et le mouvement aux ateliers, et les nuits à rédiger son Traité de l'art de fabriquer les canons, ouvrage destiné à servir de manuel aux directeurs d'usines et aux artistes.

» Ce fut dans son cours à l'École normale, qu'il fit paraître pour la première fois ses Leçons de Géométrie descriptive, dont il ne lui avait pas été permis plus tôt de révéler les secrets. Un autre établissement qui précéda l'École normale dans

l'ordre des conceptions, mais qui, mûri plus longtemps par ses auteurs, la suivit de près dans l'ordre de l'exécution, vint réaliser une partie des espérances qu'on avait vainement conçues à la fondation de la première École encyclopédique qu'on eût ouverte en France. Monge y apporta les résultats de la longue expérience de Mézières; il y joignit ses vues profondes et neuves; il créa le plan des études, indiqua leur filiation, et proposa les moyens scientifiques d'exécution. Sur quatre cents élèves appelés dès l'origine à l'École Polytechnique, les cinquante plus instruits furent réunis dans une école préparatoire : ce fut Monge qui les forma presque seul; restant le jour entier au milieu d'eux, leur donnant tout-à-tour des leçons de Géométrie et d'Analyse;... les exhortant, les encourageant, les enflammant par cette ardeur, cette bienveillance, cette impétuosité de génie, qui le faisaient, en faveur de ses élèves, déployer les vérités de la science avec une force et un charme irrésistibles. Le soir, quand les travaux étaient finis, Monge en commençait d'un autre ordre; il écrivait les feuilles d'Analyse qui devaient servir de texte à ses leçons prochaines, et le lendemain il se trouvait avec ses élèves au premier moment de leur réunion. La bonté de Monge n'était en lui ni le calcul du sage, ni même l'effet de l'éducation : c'était une bienveillance naïve qu'il devait à son heureuse organisation. Il

était né pour aimer et pour admirer. Il fut excessif dans son admiration comme dans son amour : par là peut-être il ne resta pas toujours dans les limites ou l'aurait arrêté l'impassible et froide raison... Comme il était le père des élèves au sein de l'école, tel il était, au sein des camps, le père du soldat.

» En parcourant l'Italie pour recueillir les statues et les tableaux cédés à la France (1), Monge avait été frappé du contraste singulier que présentent les monumens des Grecs et ceux des Égyptiens transportés aux bords du Tibre, sous Auguste et ses successeurs. Les caractères comparés des monumens antiques devaient être le sujet fréquent des entretiens du vainqueur de l'Italie et du commissaire qui recueillait, pour la patrie, les plus beaux fruits de la victoire. Monge concevait l'idée de reculer le domaine de l'histoire pardelà les âges fabuleux de la Grèce; d'apprendre, avec la certitude du géomètre, ce qu'étaient les travaux des anciens sages de l'Orient; de retrouver, par la contemplation de leurs monumens, ce qu'ont été... les procédés de leurs arts, les usages de leur vie publique, l'ordre et la majesté de leurs fêtes et de leurs cérémonies.

» Monge, chargé par le général en chef d'appor-

(1) Par des traités solennels (*Note de l'éditeur.*)

ter au Directoire le traité de Campo-Formio, fut, peu de temps après, au premier rang des savans qui composèrent la commission des sciences et des arts qui devait accompagner l'expédition d'Égypte. Il fut le premier nommé président de l'Institut d'Égypte, formé sur le modèle de l'Institut de France. Deux fois il visita les Pyramides; il vit l'obélisque et les grandes murailles d'Héliopolis; il étudia les débris d'antiquités épars autour du Caire et d'Alexandrie. Ce fut dans une marche pénible, dans l'intérieur du désert, qu'il trouva la cause de cet étonnant phénomène connu sous le nom de *mirage*. Au temps de la révolte du Caire, il n'y avait dans la ville que quelques détachemens de troupes; le palais de l'Institut n'était gardé que par les savans : on avait proposé de se faire jour les armes à la main jusqu'au quartier-général; mais Monge et Berthollet, songeant que le palais contenait les livres, les manuscrits, les plans et les antiquités, fruits de l'expédition, soutinrent que la conservation de ce précieux dépôt était le premier devoir des savans; et ils se décidèrent à mourir, s'il le fallait, en défendant ce trésor.

» Monge présida la commission des sciences et des arts d'Égypte; il contribua puissamment par ses conseils à la sage conception du plan, à la coordonnance, à la proportion des parties principales, enfin aux moyens de perfectionner les arts d'exécution.

» Monge avait une manière inimitable d'exposer les vérités les plus abstraites, et de les rendre sensibles par le langage d'action... Cependant ce n'est qu'en combattant la nature, qu'il avait pu devenir un excellent professeur : il parlait difficilement et presque en bégayant; il avait dans le discours une prosodie vicieuse qui lui faisait allonger à faux certaines syllabes et précipiter les autres avec rapidité. Sa physionomie, habituellement calme, présentait l'aspect de la méditation; mais lorsqu'il parlait, on croyait tout-à-coup voir un autre homme; un feu nouveau brillait tout-à-coup dans ses yeux, ses traits s'animaient, et sa figure devenait inspirée...

» Monge, affaibli par les années, était encore la victime d'une imagination qui, suivant les temps adverses ou propices, l'emportait au-delà des justes craintes, comme au-delà des justes espérances (1)... Ses derniers momens ont été sans dernières pensées, sans derniers épanchemens, sans derniers adieux : il s'est éteint dans le silence,

(1) On en vit un bien déplorable effet, lorsqu'en 1816 son nom fut effacé de la liste des membres de l'Institut. Cependant une juste confiance dans l'éclat de ses titres scientifiques aurait dû le préserver de tout abattement; car pour de tels hommes, on peut dire avec Tacite : *præfulgebant eo ipso quòd imagines eorum non visebantur* (Ann. III, 76.) (*Note de l'éditeur.*)

sans angoisses, sans terreur et sans espérances. La régularité du service n'a pas permis qu'une jeunesse généreuse vînt, à l'heure de ses funérailles, déposer la palme de la reconnaissance et des regrets sur la tombe de leur premier bienfaiteur; mais dès l'aurore qui suivit le jour des derniers devoirs, les élèves s'acheminèrent en silence vers le lieu de la sépulture, et y déposèrent un rameau de chêne auquel ils suspendirent une couronne de laurier. Vingt-trois anciens élèves de l'École Polytechnique, tous résidens de la ville de Douai, se réunirent spontanément, et décidèrent d'écrire en commun à M. Berthollet, pour le prier de diriger l'érection d'un monument, qui serait élevé aux frais des anciens élèves de l'École Polytechnique, en l'honneur de Gaspard Monge (1). »

A la suite des fragmens que nous venons de rapporter, M. Delambre ajoute : « Nous avons dû » extraire de préférence les renseignemens qui, » faisant mieux connaître l'ame de M. Monge, » expliqueront l'attachement de ses anciens élèves » et les regrets de ses anciens confrères. »

---

(1) Tous ceux qui ont eu connaissance de cette lettre se sont empressés de concourir à un hommage si bien mérité. (*Note de l'éditeur.*)

PROGRAMME.

Pour tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère, il faut premièrement diriger l'éducation nationale vers la connaissance des objets qui exigent de l'exactitude, ce qui a été totalement négligé jusqu'à ce jour, et accoutumer les mains de nos artistes au maniement des instrumens de tous les genres, qui servent à porter la précision dans les travaux et à mesurer ses différens degrés : alors les consommateurs, devenus sensibles à l'exactitude, pourront l'exiger dans les divers ouvrages, y mettre le prix nécessaire; et nos artistes, familiarisés avec elle dès l'âge le plus tendre, seront en état de l'atteindre.

Il faut, en second lieu, rendre populaire la connaissance d'un grand nombre de phénomènes naturels, indispensable au progrès de l'industrie, et profiter, pour l'avancement de l'instruction générale de la nation, de cette circonstance heureuse dans laquelle elle se trouve, d'avoir à sa disposition les principales ressources qui lui sont nécessaires.

Il faut enfin répandre, parmi nos artistes, la connaissance des procédés des arts, et celle des machines qui ont pour objet, ou de diminuer la

main-d'œuvre, ou de donner aux résultats des travaux plus d'uniformité et plus de précision; et à cet égard, il faut l'avouer, nous avons beaucoup à puiser chez les nations étrangères.

On ne peut remplir toutes ces vues qu'en donnant à l'éducation nationale une direction nouvelle.

C'est d'abord en familiarisant avec l'usage de la Géométrie descriptive tous les jeunes gens qui ont de l'intelligence, tant ceux qui ont une fortune acquise, afin qu'un jour ils soient en état de faire de leurs capitaux un emploi plus utile, et pour eux et pour l'état, que ceux mêmes qui n'ont d'autre fortune que leur éducation, afin qu'ils puissent un jour donner un plus grand prix à leur travail.

Cet art a deux objets principaux.

Le premier est de représenter avec exactitude, sur des dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et qui sont susceptibles de définition rigoureuse.

Sous ce point de vue, c'est une langue nécessaire à l'homme de génie qui conçoit un projet, à ceux qui doivent en diriger l'exécution, et enfin aux artistes qui doivent eux-mêmes en exécuter les différentes parties.

Le second objet de la Géométrie descriptive est de déduire de la description exacte des corps tout ce qui suit nécessairement de leurs formes et de

leurs positions respectives. Dans ce sens, c'est un moyen de rechercher la vérité; elle offre des exemples perpétuels du passage du connu à l'inconnu; et parce qu'elle est toujours appliquée à des objets susceptibles de la plus grande évidence, il est nécessaire de la faire entrer dans le plan d'une éducation nationale. Elle est non-seulement propre à exercer les facultés intellectuelles d'un grand peuple, et à contribuer par là au perfectionnement de l'espèce humaine, mais encore elle est indispensable à tous les ouvriers dont le but est de donner aux corps certaines formes déterminées; et c'est principalement parce que les méthodes de cet art ont été jusqu'ici trop peu répandues, ou même presque entièrement négligées, que les progrès de notre industrie ont été si lents.

On contribuera donc à donner à l'éducation nationale une direction avantageuse, en familiarisant nos jeunes artistes avec l'application de la Géométrie descriptive aux constructions graphiques qui sont nécessaires au plus grand nombre des arts, et en faisant usage de cette Géométrie pour la représentation et la détermination des élémens des machines, au moyen desquelles l'homme, mettant à contribution les forces de la nature, ne se réserve, pour ainsi dire, dans ses opérations, d'autre travail que celui de son intelligence.

Il n'est pas moins avantageux de répandre la

connaissance des phénomènes de la nature, qu'on peut tourner au profit des arts.

Le charme qui les accompagne pourra vaincre la répugnance que les hommes ont en général pour la contention d'esprit, et leur faire trouver du plaisir dans l'exercice de leur intelligence, que presque tous regardent comme pénible et fastidieux.

Ainsi, il doit y avoir à l'École normale un cours de Géométrie descriptive.

Mais comme nous n'avons sur cet art aucun ouvrage élémentaire bien fait, soit parce que jusqu'ici les savans y ont mis trop peu d'intérêt, soit parce qu'il n'a été pratiqué que d'une manière obscure par des personnes dont l'éducation n'avait pas été assez soignée, et qui ne savaient pas communiquer les résultats de leurs méditations, un cours simplement oral serait absolument sans effet.

Il est nécessaire, pour le cours de Géométrie descriptive, que la pratique et l'exécution soient jointes à l'audition des méthodes.

Ainsi les élèves doivent s'exercer aux constructions graphiques de la Géométrie descriptive. Les arts graphiques ont des méthodes générales, avec lesquelles on ne peut se familiariser que par l'usage de la règle et du compas.

Parmi les différentes applications que l'on peut faire de la Géométrie descriptive, il y en a deux qui sont remarquables, et par leur généralité, et

par ce qu'elles ont d'ingénieux : ce sont les constructions de la perspective, et la détermination rigoureuse des ombres dans les dessins. Ces deux parties peuvent être considérées comme le complément de l'art de décrire les objets.

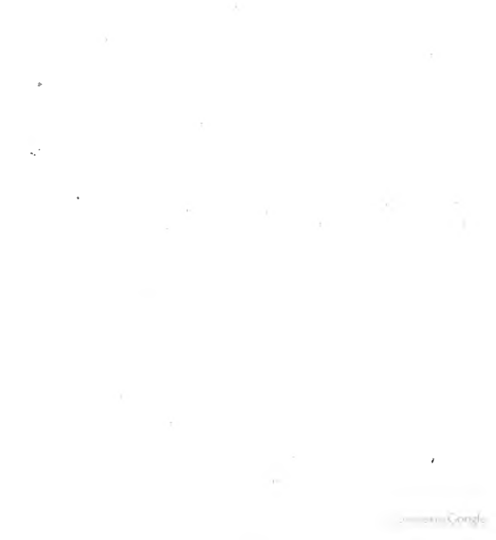


TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Avertissement de l'Éditeur, v.

Programme, xv.

I.

Nos des articles.

1. Objet de la Géométrie descriptive. 1

2— 9. Considérations d'après lesquelles on détermine la position d'un point situé dans l'espace. De la méthode des projections (fig. 1—3). 1— 12

10 Comparaison de la Géométrie descriptive avec l'Algèbre. 14— 15

11—13. Convention propre à exprimer les formes et les positions des surfaces. Application au plan. 15— 20

14—22. Solutions de plusieurs questions élémentaires relatives à la ligne droite et au plan (fig. 4—11). 21— 29

II.

23—26. Des plans tangens aux surfaces courbes, et de leurs normales. 31— 34

27—31. Méthode pour mener des plans tangens par des points donnés sur leurs surfaces (fig. 12—15). 34— 40

32. Des conditions qui déterminent la position du plan tangent à une surface courbe quelconque; observations sur les surfaces développables. 43

33—34. Des plans tangens aux surfaces, menés par des points donnés dans l'espace. 45— 47

35—44. Du plan tangent à la surface d'une ou de plusieurs sphères. Propriétés remarquables du cercle, de la sphère, des sections coniques, et des surfaces courbes du second degré (fig. 16—22). 48— 61

Nos des articles. Pages.

45—47. Du plan tangent à une surface cylindrique, conique, à une surface de révolution, par des points donnés hors de ces surfaces (fig. 23—25). 62— 63

III.

48. Des intersections des surfaces courbes. Définition des courbes à double courbure. 67

49—50. Correspondance entre les opérations de la Géométrie descriptive et celles de l'élimination algébrique. 68— 70

51—56. Méthode générale pour déterminer les projections des intersections de surface. Modification de cette méthode dans quelques cas particuliers (fig. 26). 71— 75

57—58. Des tangentes aux intersections de surfaces. 76

59—83. Intersections des surfaces, cylindrique, conique, etc. Développemens de ces intersections lorsque l'une des surfaces auxquelles elles appartiennent est développable (fig. 27—35). 78— 98

84—87. Méthode de *Roberval* pour mener une tangente à une courbe qui est donnée par la loi du mouvement d'un point générateur. Application de cette méthode à l'ellipse et à la courbe résultante de l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution qui ont un foyer commun (fig. 36 — 37). 100—102

IV.

88 — 102. Application des intersections des surfaces à la solution de diverses questions (fig. 38—42). 103—121

V.

103. Utilité de l'enseignement de la Géométrie descriptive dans les écoles secondaires. 123

104—109. Des courbes planes et à double courbure, de leurs développées, de leurs développantes, de leurs rayons de courbure (fig. 43—44). 124—128

110—112. De la surface qui est le lieu géométrique des développées d'nne courbe à double courbure;

Nos des articles. Pages.

propriété remarquable des développées, considérées sur cette surface. Génération d'une courbure quelconque à double courbure par un mouvement continu (fig. 45). 129—182

113—124. Des surfaces courbes. Démonstration de cette proposition : « Une surface quelconque n'a » dans chacun de ses points, que deux cour» bures ; chacune de ces courbures a un sens » particulier, son rayon particulier, et les » deux arcs sur lesquels se mesurent ces deux » courbures sont à angles droits sur la sur» face » (fig. 46—48). 182—141

125—131. Des lignes de courbure d'une surface quelconque, de ses centres de courbure, et de la surface qui en est le lieu géométrique. Application à la division des voûtes en voussoirs et à l'art du graveur (fig. 49). 141—149

THÉORIE DES OMBRES ET DE LA PERSPECTIVE.

132. Utilité des ombres tracées sur les épures. 151

133—135. De la description graphique des ombres (figures 50—52). 153—167

THÉORIE DE LA PERSPECTIVE.

136—139. Méthodes pour mettre les objets en perspective (fig. 53). 176—186

140—142. De la détermination des teintes dans la représentation des objets, et de la perspective aérienne. 188

143. Des variations que subissent les couleurs dans certaines circonstances. 188

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE

DESCRIPTIVE.

I.

1. La Géométrie descriptive a deux objets : le premier, de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et largeur, tous les corps de la nature qui en ont trois, longueur, largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement.

Le second objet est de donner la manière de reconnaître, d'après une description exacte, les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent et de leur forme et de leurs positions respectives.

Nous allons d'abord indiquer les procédés qu'une longue expérience a fait découvrir, pour remplir le premier de ces deux objets; nous donnerons ensuite la manière de remplir le second.

2. Les surfaces de tous les corps de la nature pouvant être considérées comme composées de points, le premier pas que nous allons faire dans cette matière doit être d'indiquer la manière dont on exprime la position d'un point dans l'espace.

L'espace est sans limites; toutes ses parties sont parfaitement semblables, elles n'ont rien qui les caractérise, et aucune d'elles ne peut servir de terme de comparaison pour indiquer la position d'un point.

Ainsi, pour définir la position d'un point dans l'espace, il faut nécessairement rapporter cette position à quelques autres objets distincts des parties de l'espace qui les renferme, et qui soient eux-mêmes connus de position, tant de celui qui définit, que de celui qui veut entendre la définition; et pour que le procédé puisse devenir lui-même d'un usage facile et journalier, il faut que ces objets soient aussi simples qu'il est possible, et que leur position soit la plus facile à concevoir.

3. Parmi tous les objets simples, nous allons rechercher quels sont ceux qui présentent plus de facilité pour la détermination de la position d'un point; et parce que la Géométrie n'offre rien de plus simple qu'un point, nous examinerons dans quel genre de considérations on serait entraîné, si, pour déterminer la position d'un point, on le rapportait à un certain nombre d'autres points dont la position serait connue; enfin, pour mettre plus de clarté dans cette exposition, nous désignerons ces points connus par les lettres successives A, B, C, etc.

Supposons d'abord que la définition de la position du point comporte qu'il soit à un mètre de distance du point connu A.

Tout le monde sait que la propriété de la surface de la sphère est d'avoir tous ses points à égale distance de son centre. Ainsi cette partie de la définition exprime que le point que l'on veut déterminer a la même propriété que tous ceux de la surface d'une sphère dont le centre serait au point A, et dont le rayon serait un mètre. Mais les points de la surface de la sphère sont les seuls dans tout l'espace qui aient cette propriété; car tous les points de l'espace qui sont au-delà de cette surface, par rapport au centre, sont plus éloignés du centre que d'un mètre, et tous ceux qui sont entre cette surface et le centre sont, au contraire, moins éloignés du centre que d'un mètre : donc tous les

points de la surface de la sphère, non-seulement jouissent de la propriété énoncée dans la proposition, mais encore ils sont les seuls qui en jouissent; donc enfin, cette proposition exprime que le point cherché est un de ceux de la surface d'une sphère dont le centre serait au point A, et dont le rayon serait un mètre. Par là, ce point est actuellement distinct d'une infinité d'autres placés dans l'espace; mais il est encore confondu avec tous ceux de la surface de la sphère; il faut d'autres conditions pour le reconnaître parmi eux.

Supposons ensuite que, d'après la définition de la position du point, il doive être à deux mètres de distance du second point connu B : il est évident qu'en raisonnant pour cette seconde condition comme pour la première, le point doit encore être un de ceux de la surface d'une seconde sphère, dont le centre serait au point B, et dont le rayon serait deux mètres. Ce point, devant se trouver en même temps et sur la surface de la première sphère et sur celle de la deuxième, ne peut plus être confondu qu'avec ceux qui sont communs aux deux surfaces, et qui sont dans leur commune intersection : or, pour peu qu'on soit familiarisé avec les considérations géométriques, on sait que l'intersection des surfaces des deux sphères est la circonférence d'un cercle dont le centre est sur la droite qui joint ceux des deux sphères, et dont le plan est perpendiculaire à cette droite; donc, en vertu des deux conditions réunies, le point cherché est actuellement distinct de ceux qui sont sur les surfaces des deux sphères, et il ne peut plus être confondu qu'avec ceux de la circonférence du cercle, qui jouissent tous des deux conditions énoncées, et qui en jouissent seuls. Il faut donc encore une troisième condition pour le distinguer.

Supposons enfin que le point doive se trouver à trois mètres de distance d'un troisième point C, connu. Cette

troisième condition le place parmi tous ceux de la surface d'une troisième sphère, dont le centre serait au point C, et dont le rayon serait trois mètres. Et parce que nous avons vu qu'il doit être sur la circonférence d'un cercle connu de position, pour satisfaire en même temps aux trois conditions, il faut qu'il soit un des points communs, et à la surface de la troisième sphère, et à la circonférence du cercle. Or, on sait qu'une circonférence de cercle et la surface d'une sphère ne peuvent se couper qu'en deux points; donc, en vertu des trois conditions, le point se trouve distingué de tous ceux de l'espace, et ne peut plus être que l'un des deux points déterminés; en sorte qu'en indiquant, de plus, de quel côté il est placé par rapport au plan qui passe par les trois centres, ce point est absolument déterminé, et ne peut plus être confondu avec aucun autre.

On voit qu'en employant, pour déterminer la position d'un point dans l'espace, ses distances à d'autres points connus, et dont le nombre est nécessairement trois, l'on est entraîné dans des considérations qui ne sont pas assez simples pour servir de base à des procédés d'un usage habituel.

4. Recherchons actuellement quelles seraient les considérations auxquelles on serait conduit, si, au lieu de rapporter la position d'un point à trois autres points connus, on le rapportait à des droites données de position.

Nous ferons observer auparavant qu'une ligne droite ne doit jamais être considérée comme terminée, et qu'elle peut toujours être indéfiniment prolongée dans l'un et dans l'autre sens.

Pour simplifier, nous nommerons successivement A, B, C, etc., les droites que nous serons obligés d'employer.

Si, de la définition de la position du point, il résulte qu'il doive se trouver, par exemple, à un mètre de distance de la première droite connue A, on énonce que ce point est

l'un de ceux de la surface d'un cylindre à base circulaire, dont l'axe serait la droite A, dont le rayon serait nn mètre, et qui serait indéfiniment prolongé dans les deux seus de sa longueur; car tous les points de cette surface jonissent de la propriété énoncée dans la définition, et sont les seuls qui en jouissent. Par là, le point est distingué de tous les points de l'espace qui sont en dehors de la surface cylindrique; il est pareillement distingué de tous ceux qui sont dans l'intérieur du cylindre, et il ne peut être confondu qu'avec ceux de la surface cylindrique; parmi lesqnels on ne peut le distinguer qu'au moyen de conditions nouvelles.

Supposons donc qne le point cherché doive, en outre, être placé à deux mètres de distance de la seconde ligne droite B : on voit de même que par là on place ce point sur la surface d'un second cylindre à base circulaire, dont l'axe serait la ligne droite B, et dont le rayon serait deux mètres, mais avec tous les points de laquelle il est confondu, si l'on ne considère que la seconde condition seule. En réunissant ces deux conditions, il doit donc se trouver en même temps et snr la première surface cylindrique et sur la seconde : donc il ne peut être que l'un des points communs à ces deux surfaces, c'est-à-dire l'un de leur commune intersection. Cette ligne, sur laquelle doit se trouver le point, participe de la courbure de la surface du premier cylindre et de la courbnre de celle du second, et est, en général, du genre de celles qu'on appelle *courbes à double courbure*.

Pour distinguer le point de tous ceux de cette ligne, il faut une troisième condition.

Supposons enfin que la définition énonce que le point demandé doive encore être à trois mètres de distance d'une troisième ligne droite C.

Cette nouvelle condition exprime qu'il est un de ceux de la surface d'un troisième cylindre à base circulaire, dont

la troisième ligne droite C serait l'axe, et qui aurait trois mètres de rayon : donc, en réunissant les trois conditions, le point cherché ne peut plus être qu'un de ceux qui sont communs, et à la troisième surface cylindrique, et à la courbe à double courbure, intersection des deux premières. Or, cette courbe peut, en général, être coupée par la troisième surface cylindrique en huit points; donc les trois conditions réduisent le point cherché à être l'un des huit points déterminés, et parmi lesquels on ne peut le distinguer que par quelques conditions particulières, du genre de celles dont nous avons donné un exemple dans le cas des points.

On voit que les considérations auxquelles on est conduit pour déterminer la position d'un point dans l'espace, par la connaissance de ses distances à trois lignes droites connues, sont encore bien moins simples que celles auxquelles donnent lieu ses distances à trois points, et qu'ainsi elles peuvent encore moins servir de base à des méthodes qui doivent être d'un service fréquent.

5. Parmi les objets simples que la Géométrie considère, il faut remarquer principalement, 1° le point, qui n'a aucune dimension; 2° la ligne droite, qui n'en a qu'une; 3° le plan, qui en a deux. Recherchons s'il ne serait pas plus simple de déterminer la position d'un point, par la connaissance de ses distances à des plans connus, qu'il ne l'est d'employer ses distances à des points ou à des lignes droites.

Supposons donc qu'il y ait, dans l'espace, des plans non parallèles connus de position, et que nous désignerons successivement par les lettres A, B, C, D, etc.

Si, d'après la définition de la position du point, il doit être, par exemple, à un mètre de distance du premier plan A, sans qu'il soit exprimé de quel côté il doit être placé par rapport à ce plan, on énonce qu'il est un de ceux

de deux plans parallèles au plan A, placés l'un d'un côté de ce plan, l'autre de l'autre, et tous deux à un mètre de distance du premier : car tous les points de ces deux plans parallèles satisfont à la condition exprimée, et sont, de tous ceux de l'espace, les seuls qui y satisfassent.

Pour distinguer, parmi tous les points de ces deux plans, celui dont on veut définir la position, il faut donc encore avoir recours à d'autres conditions.

Supposons, en second lieu, que le point cherché doive être à deux mètres de distance du second plan B : par là, on le place sur deux plans parallèles au plan B, tous deux à deux mètres de distance de ce plan, l'un d'un côté, l'autre de l'autre. Pour satisfaire en même temps aux deux conditions, il faut donc qu'il se trouve, et sur l'un des plans parallèles au plan A, et sur l'un des deux plans parallèles au plan B; et par conséquent, qu'il soit l'un des points de la commune intersection de ces quatre plans. Or, la commune intersection de quatre plans parallèles deux à deux, et de position connue, est l'assemblage de quatre lignes droites également connues de position; donc, en considérant en même temps ces deux conditions, le point n'est plus confondu avec tous ceux de l'espace, ni même avec tous ceux de quatre plans, mais seulement avec ceux de quatre lignes droites. Enfin, si le point doit être aussi à trois mètres de distance du troisième plan C, on exprime qu'il doit être l'un de ceux de deux autres plans parallèles au plan C, et placés de part et d'autre, par rapport à lui, à trois mètres de distance. Ainsi, en vertu des trois conditions, il doit être en même temps, et sur l'un des deux derniers plans, et sur l'une des quatre lignes droites, intersections des quatre premiers plans : il ne peut donc être que l'un des points communs et à l'un de ces deux plans et à l'une des lignes droites. Or, chacun des deux plans ayant un point commun avec chacune des quatre lignes droites, il y a huit points

dans l'espace qui satisfont à la fois aux trois conditions : donc, par ces trois conditions réunies, le point demandé ne peut plus être que l'un des huit points déterminés, et parmi lesquels on ne peut le distinguer qu'au moyen de quelques conditions particulières.

Par exemple, si, en indiquant la distance au premier plan A, l'on exprime aussi dans quel sens, par rapport à ce plan, la distance doit être prise ; au lieu de deux plans parallèles au plan A, il n'y en a plus qu'un qu'il faille considérer, c'est celui qui est placé, par rapport à lui, du côté vers lequel la distance doit être mesurée. De même, si l'on indique dans quel sens, par rapport au second plan, la distance doit être prise, on exclut la considération d'un des deux plans parallèles au second, et il n'y en a plus qu'un dont tous les points satisfassent à la seconde condition ; et en réunissant ces conditions, le point ne peut plus être sur les quatre droites d'intersection de quatre plans parallèles deux à deux, mais seulement sur l'intersection de deux plans, c'est-à-dire sur une ligne droite connue de position. Enfin, si l'on indique aussi de quel côté le point doit être placé, par rapport au troisième plan, de deux plans parallèles au troisième, il n'y en aura plus qu'un dont tous les points satisfassent à la dernière condition ; et pour satisfaire en même temps à ces trois conditions, le point devra se trouver à l'intersection de ce troisième plan avec la droite unique, intersection des deux premiers. Il ne pourra donc plus être confondu avec aucun autre dans l'espace, et il sera par conséquent entièrement déterminé.

On voit donc que, quoique, par rapport au nombre de ses dimensions, le plan soit un objet moins simple que la ligne droite qui n'en a qu'une, et que le point qui n'en a pas, il présente cependant plus de facilité que le point et la ligne droite pour la détermination d'un point dans l'espace : c'est ce procédé que l'on emploie ordinairement dans

l'application de l'Algèbre à la Géométrie, où, pour chercher la position d'un point, on a coutume de chercher ses distances à trois plans connus de position.

Mais dans la Géométrie descriptive, qui a été pratiquée depuis beaucoup plus long-temps, par un beaucoup plus grand nombre d'hommes, et par des hommes dont le temps était précieux, les procédés se sont encore simplifiés; et au lieu de la considération de trois plans, on est parvenu, au moyen des projections, à n'avoir plus besoin explicitement que de celle de deux.

6. On appelle *projection* d'un point sur un plan, le pied de la perpendiculaire abaissé du point sur le plan.

Cela posé, si l'on a deux plans connus de position dans l'espace, et si l'on donne, sur chacun de ces plans, la projection du point dont on veut définir la position, ce point sera parfaitement déterminé.

En effet, si, par la projection sur le premier plan, l'on conçoit une perpendiculaire à ce plan, il est évident qu'elle passera par le point défini; de même si, par sa projection sur le second plan, l'on conçoit une perpendiculaire sur ce plan, elle passera de même par le point défini : donc ce point sera en même temps sur deux lignes droites connues de position dans l'espace; donc il sera le point unique de leur intersection : donc enfin, il sera parfaitement déterminé.

Dans les paragraphes suivans, on indiquera les moyens de rendre ce procédé d'un usage facile, et de nature à être employé sur une seule feuille de dessin.

7. Pl. 1, fig. 1. Si, de tous les points d'une ligne droite indéfinie AB, placée d'une manière quelconque dans l'espace, l'on conçoit des perpendiculaires abaissées sur un plan LMNO, donné de position, tous les points de rencontre de ces perpendiculaires avec le plan seront dans une autre ligne droite indéfinie *ab*, car elles seront toutes

comprises dans le plan mené par AB perpendiculairement au plan LMNO, et elles ne pourront rencontrer ce dernier que dans l'intersection commune des deux plans, qui, comme on sait, est une ligne droite.

La droite *ab*, qui passe ainsi par les projections de tous les points d'une autre droite AB sur un plan LMNO, est ce qu'on appelle la *projection* de la droite AB sur ce plan.

Comme deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite, pour construire la projection d'une droite, il suffit de construire celle de deux de ses points, et la droite menée par les projections de ces points sera la projection demandée.

Il suit de là que, si la droite proposée est elle-même perpendiculaire au plan de projection, sa projection se réduira à un seul point, qui sera celui de sa rencontre avec le plan.

Fig. 2. Étant données sur deux plans non parallèles LMNO, LMPQ, les projections *ab*, *a'b'*, d'une même droite indéfinie AB, cette droite est déterminée : car si, par l'une des projections *ab*, l'on conçoit un plan perpendiculaire à LMNO, ce plan, connu de position, passera nécessairement par la droite AB; de même, si par l'autre projection *a'b'*, l'on conçoit un plan perpendiculaire à LMPQ, ce plan, connu de position, passera par la droite AB. La position de cette droite, qui se trouve en même temps sur deux plans connus, et par conséquent à leur commune intersection, est donc absolument déterminée.

8. Ce que nous venons de dire est indépendant de la position des plans de projection, et a lieu également, quel que soit l'angle que ces deux plans fassent entre eux. Mais si l'angle que forment les deux plans de projection est très obtus, l'angle que forment entre eux ceux qui leur sont perpendiculaires est très obtus; et dans la pratique, de petites erreurs pourraient en apporter de très grandes dans

la détermination de la position de la droite. Pour éviter cette cause d'inexactitude, à moins qu'on n'en soit détourné par quelques considérations qui présentent de plus grandes facilités, on fait toujours en sorte que les plans de projection soient perpendiculaires entre eux. De plus, comme la plupart des artistes qui font usage de la méthode des projections sont très familiarisés avec la position d'un plan horizontal et la direction du fil à plomb, ils ont coutume de supposer que, des deux plans de projection, l'un soit horizontal et l'autre vertical.

La nécessité de faire en sorte que dans les dessins les deux projections soient sur une même feuille, et que dans les opérations en grand elles soient sur une même aire, a encore déterminé les artistes à concevoir que le plan vertical ait tourné autour de son intersection avec le plan horizontal, comme charnière, pour s'abattre sur le plan horizontal, et ne former avec lui qu'un seul et même plan, et à construire leurs projections dans cet état.

Ainsi, la projection verticale est toujours tracée de fait sur un plan horizontal, et il faut perpétuellement concevoir qu'elle soit dressée et remise en place, au moyen d'un quart de révolution autour de l'intersection du plan horizontal avec le plan vertical. Pour cela, il faut que cette intersection soit tracée d'une manière très visible sur le dessin.

Ainsi, dans la fig. 2, la projection $a'b'$ de la droite AB ne s'exécute pas sur un plan qui soit réellement vertical : on conçoit que ce plan ait tourné autour de la droite LM pour s'appliquer en LMP'Q'; et c'est dans cette position du plan qu'on exécute la projection verticale $a'b'$.

Indépendamment des facilités d'exécution que présente cette disposition, elle a encore l'avantage d'abréger le travail des projections. En effet, supposons que les points a, a', soient les projections horizontale et verticale du point A;

le plan mené par les droites Aa, Aa', sera en même temps perpendiculaire aux deux plans de projection, puisqu'il passe par des droites qui leur sont perpendiculaires; il sera donc aussi perpendiculaire à leur commune intersection LM; et les droites aC, $a'C$, suivant lesquelles il coupe ces deux plans, seront elles-mêmes perpendiculaires à LM.

Or, lorsque le plan vertical tourne autour de LM comme charnière, la droite $a'C$ ne cesse pas, dans ce mouvement, d'être perpendiculaire à LM; et elle lui est encore perpendiculaire lorsque, le plan vertical étant abattu, elle a pris la position Ca''. Donc les deux droites aC, Ca'', passant toutes deux par le point C, et étant toutes deux perpendiculaires à LM, sont dans le prolongement l'une de l'autre; il en est de même des droites bD, Db'', par rapport à tout autre point comme B. D'où il suit que, si l'on a la projection horizontale d'un point, la projection de ce même point sur le plan vertical supposé abattu, sera dans la droite menée par la projection horizontale perpendiculairement à l'intersection LM des deux plans de projection, et réciproquement.

Ce résultat est d'un usage très fréquent dans la pratique.

9. Jusqu'à présent, nous avons regardé la ligne droite AB (fig. 1) comme indéfinie, et alors nous n'avions à nous occuper que de sa direction; mais il peut se faire que cette droite soit considérée comme terminée par deux de ses points A, B; et alors on peut de plus avoir besoin de connaître sa grandeur. Nous allons voir comment on peut la déduire de la connaissance de ses deux projections.

Lorsqu'une droite est parallèle à un des deux plans sur lesquels elle est projetée, sa longueur est égale à celle de sa projection sur ce plan; car la droite et sa projection, étant toutes deux terminées à deux perpendiculaires au plan de projection, sont parallèles entre elles, et comprises

entre parallèles. Ainsi, dans ce cas particulier, la projection étant donnée, la longueur de la droite qui lui est égale est aussi donnée.

On est assuré qu'une droite est parallèle à ses deux plans de projection, lorsque sa projection sur l'autre est parallèle à l'intersection de ces plans.

Si la droite est en même temps oblique aux deux plans, sa longueur est plus grande que celle de chacune de ses projections; mais elle peut en être déduite par une construction très simple.

Fig. 2. Soit AB la ligne droite, dont les deux projections *ab*, *a'b'*, soient données, et dont il faille trouver la longueur; si, par une de ses extrémités A, et dans le plan vertical qui passe par la droite, on conçoit une horizontale AE, prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en E la verticale abaissée par l'autre extrémité, on formera un triangle rectangle AEB, qu'il s'agit de construire pour avoir la longueur de la droite AB, qui en est l'hypoténuse. Or, dans ce triangle, indépendamment de l'angle droit, on connaît le côté AE, qui est égal à la projection donnée *ab*. De plus, si dans le plan vertical on mène par le point *a'* une horizontale *a'e*, qui sera la projection de AE, elle coupera la verticale *b'*D en un point *e*, qui sera la projection du point E. Ainsi, *b'e* sera la projection verticale de BE, et sera par conséquent de même longueur qu'elle. Donc, connaissant les deux côtés de l'angle droit, il sera facile de construire le triangle, dont l'hypoténuse donnera la longueur de AB.

La figure 2, étant en perspective, n'a aucun rapport avec les constructions de la méthode des projections : nous allons donner ici la construction de cette première question dans toute sa simplicité.

Fig. 3. La droite LM étant supposée dans l'intersection des deux plans de projection, et les droites *ab*, *a''b''*, étant les projections données d'une ligne droite; pour trouver la

longueur de cette droite, par le point a'' on mènera l'horizontale indéfinie He, qui coupera la droite bb'' en un point e, sur laquelle, à partir de ce point, on portera ab de e en H. On mènera l'hypoténuse Hb'', et la longueur de cette hypoténuse sera celle de la droite demandée.

Comme les deux plans de projection sont rectangulaires, l'opération que l'on vient de faire sur un de ces plans pouvait être faite sur l'autre, et aurait donné le même résultat.

D'après ce qui précède, on voit que si l'on a les deux projections d'un corps terminé par des faces planes, par des arêtes rectilignes, et par des sommets d'angles solides, projections qui se réduisent aux systèmes de celles des arêtes rectilignes, il sera facile d'en conclure la longueur de telle de ses dimensions qu'on voudra ; car, ou cette dimension sera parallèle à un des deux plans de projection, ou elle sera en même temps oblique aux deux : dans le premier cas, la longueur demandée de la dimension sera égale à sa projection ; dans le second, on la déduira de ces deux projections par le procédé que nous venons de décrire.

10. Ce serait ici le lieu d'indiquer la manière dont se construisent les projections des solides terminés par des plans et des arêtes rectilignes ; mais il n'y a pour cette opération aucune règle générale. On sent en effet que, selon la manière dont la position des sommets des angles d'un solide est définie, la construction de leurs projections peut être plus ou moins facile, et que la nature de l'opération doit dépendre de celle de la définition. Il en est précisément de cet objet comme de l'Algèbre, dans laquelle il n'y a aucun procédé général pour mettre un problème en équations. Dans chaque cas particulier, la marche dépend de la manière dont la relation entre les quantités données et celles qui sont inconnues est exprimée ; et ce n'est que par des exemples variés que l'on peut accoutumer les commençans à saisir ces relations et à les écrire par des équations. Il en est de même

pour la Géométrie descriptive. C'est par des exemples nombreux et par l'usage de la règle et du compas dans des salles d'exercice, que l'on peut acquérir l'habitude des constructions, et que l'on s'accoutume au choix des méthodes les plus simples et les plus élégantes, dans chaque cas particulier. Mais aussi, de même qu'en Analyse, lorsqu'un problème est mis en équations, il existe des procédés pour traiter ces équations, et pour en déduire les valeurs de chaque inconnue; de même aussi, dans la Géométrie descriptive, lorsque les projections sont faites, il existe des méthodes générales pour construire tout ce qui résulte de la forme et de la position respective des corps.

Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la Géométrie descriptive à l'Algèbre; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de Géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en Analyse; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en Géométrie.

Il serait à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble : la Géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées, l'évidence qui est son caractère; et, à son tour, l'Analyse porterait dans la Géométrie la généralité qui lui est propre.

11. La convention qui sert de base à la méthode des projections, est propre à exprimer la position d'un point dans l'espace, à exprimer celle d'une ligne droite indéfinie ou terminée, et par conséquent à représenter la forme et la position d'un corps terminé par des faces planes, par des arêtes rectilignes, et par des sommets d'angles solides; parce que, dans ce cas, le corps est entièrement connu, quand on connaît la position de toutes ces arêtes et celle des sommets de tous ses angles. Mais si le corps était terminé, ou par une surface courbe unique, et dont tous les points fussent assu-

jettis à une même loi, comme dans le cas dc la sphère, ou par l'assemblage discontinu de plusieurs parties de surfaces courbes différentes, comme dans le cas d'un corps façonné sur le tour, cette convention non-seulement serait incommode, impraticable, et n'aurait pas l'avantage de faire image, mais encore elle manquerait de fécondité et elle serait insuffisante.

D'abord, il est facile de voir que la convention que nous avons faite serait incommode, et même impraticable, si elle était seule; car, pour exprimer la position de tous les points d'une surface courbe, il faudrait non-seulement que chacun d'eux fût indiqué par sa projection horizontale et par sa projection verticale, mais encore que les deux projections d'un même point fussent liées entre elles, afin qn'on ne fût pas exposé à combiner la projection horizontale d'un certain point avec la projection verticale d'un autre; et la manière la plus simple de lier entre elles ces deux projections étant de les joindre par une même droite perpendiculaire à la ligne d'intersection des deux plans de projections, on surchargerait les dessins d'un nombre prodigieux de lignes qui y jetteraient une confusion d'autant plus grande qu'on voudrait approcher davantage de l'exactitude. Nous allons faire voir ensuite qne cette méthode serait insuffisante, et qu'elle manquerait de la fécondité nécessaire.

Parmi le nombre infini de surfaces courbes différentes, il en existe quelques-nnes qui ne s'étendent que dans une partie finie et circonscrite de l'espaoe, et dont les projections ont une étendue limitée dans toutes les directions : celle de la sphère, par exemple, est dans ce cas. L'étendue de sa projection sur un plan se réduit à celle d'un cercle de même rayon que la sphère; et on peut concevoir que le plan sur lequel on doit en faire la projection ait des dimensions assez grandes pour la recevoir. Mais toutes les snrfaces cylindriques sont indéfinies dans une certaine direction, comme la

droite qui leur sert de génératrice. Le plan lui-même qui est la plus simple des snrfaces, est indéfini dans deux sens. Enfin, il existe un grand nombre de surfaces dont les nappes multipliées s'étendent en même temps dans toutes les régions de l'espace. Or, les plans sur lesquels on exécute les projections ont nécessairement une étendue limitée. Si donc on n'avait d'autre moyen pour faire connaître la nature d'une surface courbe, que les deux projections de chacun des points par lesquels elle passe, ce moyen ne serait applicable qu'à ceux des points de la surface qui correspondraient à l'étendue des plans de projections; tous ceux qui seraient au-delà ne pourraient être ni exprimés ni connus : ainsi la méthode serait insuffisante. Enfin, elle manquerait de fécondité, parce qu'on ne pourrait en déduire rien de ce qui serait relatif aux plans tangens de la surface, à ses normales, à ses deux courbures en chaque point, à ses lignes d'inflexion, à ses arêtes de rebroussement, à ses lignes multiples, à ses points multiples, à toutes les affections enfin qu'il est nécessaire de considérer, dès qu'on veut opérer sur une surface courbe.

Il a donc fallu avoir recours à une convention nouvelle qui fût compatible avec la première, et qui pût la suppléer partout où elle aurait été insuffisante. C'est cette convention nouvelle que nous allons exposer.

12. Il n'y a aucune surface courbe qui ne puisse être regardée comme engendrée par le mouvement d'une ligne courbe, ou constante de forme lorsqu'elle change de position, ou variable en même temps et de forme et de position dans l'espace. Comme cette proposition pourrait être difficile à comprendre à cause de sa généralité, nons allons l'expliquer sur quelques-uns des exemples avec lesquels nous sommes déjà familiarisés.

Les surfaces cylindriqnes peuvent être engendrées de deux manières principales : ou par le mouvement d'une ligne droite qui reste toujours parallèle à une droite donnée pen-

dant qu'elle se meut, en s'appuyant tonjours sur une courbe donnée, ou par le monvement de la courbe qni servait de conductrice dans le premier cas, et qui se meut de manière que, s'appuyant toujours par le même point sur une droite donnée, tous les autres points décrivent des lignes parallèles à cette droitc. Dans l'une et l'autre de ces denx générations, la ligne génératrice, qui est une droite dans le premier cas, et une courbe quelconque dans le second, est constante de forme : elle ne fait que changer de position dans l'espace.

Les surfaces coniques ont de même deux générations principales.

On peut d'abord les regarder comme engendrées par nne droite indéfinie qui, étant assujettie à passer toujours par un point donné, se meut de manière qu'elle s'appuie constamment sur une courbe donnée qui la dirige dans son mouvement. Le point unique par lequel passe toujours la droite, est le centre de la surface ; c'est improprement qu'on lni a donné le nom de *sommet*. Dans cette génération, la ligne génératrice est encore constante de forme ; elle ne cesse jamais d'être une ligne droite.

On peut ensuite engendrer les surfaces coniques d'une autre manière, qne, pour plus de simplicité, nous n'appliquerons ici qu'au cas de celles qui sont à bases circulaires. Ces surfaces penvent être regardées comme parcournes par la circonférence d'un cercle qui se meut de manière que son plan restant toujours parallèle à lui-même, et son centre se trouvant toujours sur la droite dirigée au sommet, son rayon, dans chaque instant de mouvement, soit proportionnel à la distance de son centre au sommet. On voit que si, dans son mouvement, le plan du cercle tend à s'approcher du sommet de la surface, le rayon du cercle décroît pour devenir nul lorsque le plan passe par le sommet, et qne ce rayon change dc sens pour croître ensuite indéfiniment, lorsque le plan, après avoir passé par le sommet,

s'en écarte de plus en plus. Dans cette seconde génération, non-seulement la circonférence du cercle, qui est la courbe génératrice, change de position, elle change encore de forme à chaque instant de son mouvement, puisqu'elle change de rayon, et, par conséquent, de courbure et d'étendue.

Citons enfin un troisième exemple.

Une surface de révolution peut être engendrée par le mouvement d'une courbe plane qui tourne autour d'une ligne droite placée d'une manière quelconque dans son plan. Dans cette manière de la considérer, sa courbe génératrice est constante de forme; elle est seulement variable de position. Mais aussi on peut la regarder comme engendrée par la circonférence d'un cercle qui se meut de manière que son centre étant toujours sur l'axe, et son plan étant toujours perpendiculaire à cet axe, son rayon soit à chaque instant égal à la distance du point où le plan du cercle coupe l'axe à celui où il coupe une courbe quelconque donnée dans l'espace. Alors la courbe génératrice change en même temps et de forme et de position.

Ces trois exemples doivent suffire pour faire comprendre que toutes les surfaces courbes peuvent être engendrées par le mouvement de certaines lignes courbes, et qu'il n'y en a aucune dont la forme et la position ne puissent être entièrement déterminées par la définition exacte et complète de sa génération. C'est cette nouvelle considération qui forme le complément de la méthode des projections. Nous aurons souvent occasion, par la suite, de nous assurer de sa simplicité et de sa fécondité.

Ce n'est donc pas en donnant les projections des points individuels par lesquels passe une surface courbe que l'on en détermine la forme et la position, mais en mettant à portée de construire par un point quelconque la courbe génératrice, suivant la forme et la position qu'elle doit

avoir en passant par ce point. Sur quoi il faut observer, 1° que chaque surface courbe pouvant être engendrée d'un nombre infini de manières différentes, il est de l'adresse et de la sagacité de celui qui opère de choisir, parmi toutes les générations possibles, celle qui emploie la courbe la plus simple et qui exige les considérations les moins pénibles; 2° qu'un long usage a appris qu'au lieu de ne considérer pour chaque surface courbe qu'une senle de ces générations, ce qui exigerait l'étude de la loi du mouvement et de celle du changement de forme de sa génération, il est souvent plus simple de considérer en même temps deux génératrices différentes, et d'indiquer, pour chaque point, la construction des deux courbes génératrices.

Ainsi, dans la Géométrie descriptive, pour exprimer la forme et la position d'une surface courbe, il suffit, pour un point quelconque de cette surface, et dont une des projections peut être prise à volonté, de donner la manière de construire les projections horizontale et verticale de deux génératrices différentes qui passent par ce point.

13. Appliquons actuellement ces généralités au plan qui, de toutes les surfaces, est la plus simple et celle dont l'emploi est le plus fréquent.

Le plan est engendré par une première droite donnée d'abord de position, et qui se ment de manière que tous ses points décrivent des droites parallèles à une seconde droite donnée. Si la seconde droite est elle-même dans le plan que l'on considère, on peut dire aussi que ce plan est engendré par la seconde droite, qui se meut de manière que tous ses points décrivent des droites parallèles à la première.

On a donc l'idée de la position d'un plan par la considération de deux lignes droites, dont chacune peut être regardée comme sa génératrice. La position de ces deux droites dans le plan qu'elles peuvent engendrer est absolu-

ment indifférente : il ne s'agit donc, pour la méthode des projections, que de choisir celles qui exigent les constructions les plns simples. C'est pour cela quc, dans la Géométrie descriptive, on indique la position d'un plan en donnant les deux droites suivant lesquelles il coupe les plans de projection. Il est facile de reconnaître que ces deux droites doivent rencontrer en un même point l'intersection des deux plans de projection, et que, par conséquent, ce point est celui où elles se rencontrent elles-mêmes.

Comme il arrivera très fréquemment que nous ayons des plans à considérer, pour abréger le langage, nous donnerons le nom de *traces* aux droites selon lesquelles chacun d'eux coupera les plans de projections, et qui serviront à indiquer sa position.

14. Ces préliminaires étant posés, nous allons passer aux solutions de plusienrs questions successives, qui rempliront le double objet de nous exercer à la méthode des projections, et de nous procurer les moyens de faire ensuite de nouveaux progrès dans la Géométrie descriptive.

Première question. Étant donnés (pl. 2, fig. 4) un point dont les projections soient D, *d*, et une droite dont les projections soient AB et *ab*, construire les projections d'une seconde droite menée par le point donné parallèlement à la première.

Solution. Les deux projections horizontales de la droite donnée et de la droite cherchée doivent être parallèles entre elles ; car elles sont les intersections de deux plans verticaux parallèles, par un même plan. Il en est de même des projections verticales des mêmes droites. De plus, la droite demandée devant passer par le point donné, ses projections doivent passer respectivement par celles du même point. Donc, si par le point D on mène EF parallèle à AB, et si par le point *d* on mène *ef* parallèle à *ab*, les droites EF et *ef* seront les projections demandées.

15. *Seconde question.* Étant donnés (fig. 5) un plan dont les deux traces soient AB, BC, et un point dont les projections soient G, *g*, construire les traces d'un second plan mené par le point donné parallèlement au premier.

Solution. Les traces du plan demandé doivent être parallèles aux traces respectives du plan donné, puisque ces traces, considérées deux à deux, sont les intersections de deux plans parallèles, par un même plan. Il ne reste donc plus à trouver, pour chacune d'elles, qu'un seul des points par lesquels elle doit passer. Pour cela, par le point donné, concevons une droite horizontale qui soit dans le plan cherché; cette droite sera parallèle à la trace AB, et elle coupera le plan vertical en un point, qui sera un de ceux de la trace du plan cherché sur le vertical, et l'on aura ses deux projections en menant par le point *g* l'horizontale indéfinie *g*F, et par le point G la droite GI, parallèle à AB. Si l'on prolonge GI jusqu'à ce qu'elle rencontre l'intersection LM des deux plans de projection en un point I, ce point sera la projection horizontale de l'intersection de la droite horizontale avec le plan vertical. Donc ce point d'intersection se trouvera sur la verticale IF, menée par le point I. Mais il doit se trouver aussi sur *g*F; donc il se trouvera au point F d'intersection de ces deux dernières droites. Donc enfin, si par le point F on mène une parallèle à BC, elle sera, sur le plan vertical, la trace du plan cherché; et si, après avoir prolongé cette trace jusqu'à ce qu'elle rencontre LM en un point E, on mène ED parallèle à AB, on aura la trace du même plan sur le plan horizontal.

Au lieu de concevoir sur le plan cherché une droite horizontale, on aurait pu concevoir une parallèle au plan vertical, ce qui, par un raisonnement absolument semblable, aurait donné la construction suivante :

On mènera par le point G, et parallèlement à LM, la droite indéfinie GD; par le point *g* on mènera *g*H parallèle

à CB, et on la prolongera jusqu'à ce qu'elle coupe LM eu un point H, par lequel on mène HD perpendiculaire à LM : cette dernière coupera GD en un point D, par lequel, si l'on mène une parallèle à AB, on aura une des traces du plan demandé; et si, après avoir prolongé cette trace jusqu'à ce qu'elle rencontre LM en un point E, on mène EF parallèle à BC, on aura la trace sur le plan vertical.

16. *Troisième question.* Étant donnés (fig. 6) un plan dont les deux traces soient AB, BC, et un point dont les deux projections soient D, *d*, construire, 1° les projections de la droite abaissée perpendiculairement du point sur le plan; 2° celle du point de rencontre de la droite et du plan.

Solution. Les perpendiculaires DC, *dg*, abaissées des points D et *d* sur les traces respectives du plan, seront les projections indéfinies de la droite demandée; car si par la perpendiculaire on conçoit un plan vertical, ce plan coupera le plan horizontal et le plan donné en deux droites, qui seront l'une et l'autre perpendiculaires à la commune intersection AB de ces deux plans : or, la première de ces droites, étant la projection du plan vertical, est aussi celle de la perpendiculaire qu'il renferme; donc la projection de cette perpendiculaire doit passer par le point D, et être perpendiculaire à AB.

La même démonstration a lieu pour la projection verticale.

Quant au point de rencontre de la perpendiculaire et du plan, il est évident qu'il doit se trouver sur l'intersection de ce plan avec le plan vertical mené par la perpendiculaire; intersection qui est projetée indéfiniment sur EF. Si l'on avait la projection verticale *fe* de cette intersection, elle contiendrait celle du point demandé; et parce que ce point doit aussi être projeté sur la droite *dg*, il se trouverait à l'intersection *g* des deux droites *ef* et *dg*. Il ne reste donc

plus à trouver que la droite *fe* : or, l'intersection du plan donné avec le plan vertical qui lui est perpendiculaire rencontre le plan horizontal au point E, dont on aura la projection verticale *e*, en abaissant E*e* perpendiculairement sur LM; et elle rencontre le plan vertical de projection en un point dont la projection horizontale est l'intersection F de la droite LM avec DG, prolongée, s'il est nécessaire, et dont la projection verticale doit être sur la verticale F*f* et sur la trace CB; elle sera donc au point *f* de leur intersection.

La projection verticale *g* du pied de la perpendiculaire étant trouvée, il est facile de construire sa projection horizontale; car si l'on abaisse sur LM la perpendiculaire indéfinie *g*G, cette droite contiendra le point demandé : or, la droite DF doit aussi le contenir; donc il sera au point G de l'intersection de ces deux droites.

17. *Quatrième question.* Étant donnés (fig. 7) une droite dont les deux projections soient AB, *ab*, et un point dont les deux projections soient D, *d*, construire les traces du plan mené par le point perpendiculairement à la droite.

Solution. On sait déjà, par la question précédente, que les deux traces doivent être perpendiculaires aux projections respectives des deux droites; il reste à trouver, pour chacune d'elles, un des points par lesquels elle doit passer. Pour cela, si, par le point donné, on conçoit, dans le plan cherché, une horizontale prolongée jusqu'à la rencontre du plan vertical de projection, on aura sa projection verticale en menant par le point *d* une horizontale indéfinie *d*G, et sa projection horizontale en menant par le point D une perpendiculaire DH à AB, prolongée jusqu'à ce qu'elle coupe LM en un point H, qui sera la projection horizontale du point de rencontre de l'horizontale avec le plan vertical de projection. Ce point de rencontre, qui doit se trouver dans la verticale HG et dans l'horizontale *d*G, et

par conséquent au point G d'intersection de ces deux droites, sera donc un des points de la trace sur le plan vertical; donc on aura cette trace en menant par le point G la droite FC perpendiculaire à *ab;* donc enfin, si par le point C, où la première trace rencontre LM, on mène CE perpendiculaire à AB, on aura la seconde trace demandée.

S'il était question de trouver le point de rencontre du plan avec la droite, on opérerait exactement comme dans la question précédente.

Enfin, s'il fallait abaisser une perpendiculaire du point donné sur la droite, on construirait, comme nous venons de le dire, la rencontre de la droite avec le plan mené par le point donné, et qui lui serait perpendiculaire; et l'on aurait, pour chacune des deux projections de la perpendiculaire demandée, deux points par lesquels elle doit passer.

18. *Cinquième question.* Deux plans étant donnés de position (pl. 3, fig. 8), au moyen de leurs traces AB et *ab* pour l'un, CD et C*d* pour l'autre, construire les projections de la droite suivant laquelle ils se coupent.

Solution. Tous les points de la trace AB se trouvant sur le premier des deux plans donnés, et tous ceux de la trace CD se trouvant sur le second, le point E d'intersection de ces deux traces est évidemment sur les deux plans; il est, par conséquent, un des points de la droite demandée. On reconnaîtra de même que le point F d'intersection des deux traces sur le plan vertical est encore un autre point de cette droite. L'intersection des deux plans est donc placée de manière qu'elle rencontre le plan horizontal en E et le plan vertical en F.

Donc, si l'on projette le point F sur le plan horizontal, ce qu'on fera en abaissant sur LM la perpendiculaire F*f*, et si l'on mène la droite *f*E, elle sera la projection horizontale de l'intersection des deux plans. De même, si l'on projette

le point E sur le plan vertical, en abaissant sur LM la perpendiculaire E*e*, et si l'on mène la droite *e*F, elle sera la projection verticale de la même intersection.

19. *Sixième question.* Deux plans (fig. 9) étant donnés, au moyen des traces AB, A*b*, du premier, et des traces CD, C*d*, du second, construire l'angle qu'ils forment entre eux.

Solution. Après avoir construit, comme dans la question précédente, la projection horizontale E*f* de l'intersection des deux plans, si l'on conçoit un troisième plan qui leur soit perpendiculaire, et qui soit par conséquent perpendiculaire à leur commune intersection, ce troisième plan coupera les deux plans donnés en deux droites, qui comprendront entre elles un angle égal à l'angle demandé.

De plus, la trace horizontale de ce troisième plan sera perpendiculaire à la projection E*f* de l'intersection des deux plans donnés, et elle formera avec les deux autres droites un triangle dont l'angle opposé au côté horizontal sera l'angle demandé. Il ne s'agit donc plus que de construire ce triangle.

Or, il est indifférent par quel point de l'intersection des deux premiers plans passe le troisième; on peut donc prendre sa trace à volonté sur le plan horizontal, pourvu qu'elle soit perpendiculaire à E*f*. Soit donc menée une droite quelconque GH, perpendiculaire à E*f*, terminée en G et en H aux traces des deux plans donnés, et qui rencontre E*f* en un point I; cette droite sera la base du triangle qu'il faut construire. Actuellement, concevons que le plan de ce triangle tourne autour de sa base GH comme charnière, pour s'appliquer sur le plan horizontal; dans ce mouvement, son sommet, qui est d'abord placé sur l'intersection des deux plans, ne sort pas du plan vertical mené par cette intersection, parce que ce plan vertical est perpendiculaire à GH; et lorsque le plan du triangle est abattu,

ce sommet se trouve snr un des points de la droite E*f*. Ainsi il ne reste plus à trouver que la hauteur du triangle on la grandenr de la perpendiculaire abaissée du point I snr l'intersection de deux plans.

Mais cette perpendiculaire est comprise dans le plan vertical mené par E*f*. Si donc on conçoit que ce plan tourne autour de la verticale *f*F pour s'appliqner sur le plan vertical de projection, et si l'on porte *f*E de *f* en *e*, *f*I de *f* en *i*, la droite *e*F sera la grandeur de la partie de l'intersection comprise entre les deux plans de projection; et si du point *i* l'on abaisse snr cette droite la perpendiculaire *ik*, elle sera la hauteur du triangle demandé.

Done enfin portant *ik* de I en K, et achevant le triangle GKH, l'angle en K sera égal à l'angle formé par les deux plans.

20. *Septième question.* Deux droites qui se coupent dans l'espace (fig. 10) étant données par leurs projections horizontales AB, AC, et par leurs projections verticales *ab*, *ac*, construire l'angle qu'elles forment entre elles.

Avant de procéder à la solntion, nous remarquerons que, puisque les denx droites données sont snpposées se couper, le point A de rencontre de lenrs projections horizontales, et le point *a* de rencontre de leurs projections verticales, seront les projections du point dans lequel elles se coupent, et seront par conséquent dans la même droite *a*GA perpendiculaire à LM. Si les deux points A et *a* n'étaient pas dans une même perpendicnlaire à LM, les droites données ne se couperaient pas, et par conséquent ne seraient pas dans un même plan.

Solution. On concevra les deux droites données prolongées jusqu'à ce qn'elles rencontrent le plan horizontal, chacune en nn point, et l'on construira ces deux points de rencontre. Pour cela, on prolongera les droites *ab*, *ac*, jusqu'à ce qu'elles coupent LM en deux points *d*, *e*, qui

seront les projections verticales de ces deux points de rencontre : par les points *d*, *e*, on mènera dans le plan horizontal et perpendiculairement à LM, deux droites indéfinies *d*D, *e*E, qui, devant passer chacune par un de ces points, détermineront leurs positions par leurs intersections D, E, avec les projections horizontales respectives AB, AC, prolongées s'il est nécessaire.

Cela fait, si l'on mène la droite DE, cette droite et les deux parties des droites données, comprises entre leur point d'intersection et les points D, E, formeront un triangle dont l'angle opposé à DE sera l'angle demandé ; ainsi il ne s'agira plus que de construire ce triangle. Pour cela, après avoir abaissé du point A sur DE la perpendiculaire indéfinie AF, si l'on conçoit que le plan du triangle tourne autour de sa base DE comme charnière, jusqu'à ce qu'il soit abattu sur le plan horizontal ; le sommet de ce triangle, pendant son mouvement, ne sortira pas du plan vertical mené par AF, et viendra s'appliquer quelque part sur le prolongement de FA en un point H, dont il ne restera plus à trouver que la distance à la base DE.

Or, la projection horizontale de cette distance est la droite AF, et la hauteur verticale d'une de ses extrémités au-dessus de l'autre est égale à *a*G ; donc, en vertu de la fig. 3, pl. 1, si sur LM on porte AF de G en *f*, et si l'on mène l'hypoténuse *af*, cette hypoténuse sera la distance demandée. Donc enfin, si l'on porte *af* de F en H, et si par le point H on mène les deux droites HD, HE, le triangle sera construit, et l'angle DHE sera l'angle demandé.

21. *Huitième question.* Étant données les projections d'une droite et les traces d'un plan, construire l'angle que la droite et le plan forment entre eux.

Solution. Si par un point pris sur la droite donnée, on conçoit une perpendiculaire au plan donné, l'angle que cette perpendiculaire formera avec la droite donnée sera

le complément de l'angle demandé, et il suffira de construire cet angle pour résoudre la question.

Or, si sur les deux projections de la droite, on prend deux points qui soient dans la même perpendiculaire à l'intersection des deux plans de projection, et si, par ces deux points, on mène des perpendiculaires aux traces respectives du plan donné, on aura les projections horizontale et verticale de la seconde droite. La question sera donc réduite à construire l'angle formé par deux droites qui se coupent, et rentrera dans le cas de la précédente.

22. Lorsqu'on se propose de lever la carte d'un pays, on conçoit ordinairement que les points remarquables soient liés entre eux par des lignes droites qui forment des triangles, et il s'agit ensuite de rapporter ces triangles sur la carte, au moyen d'une échelle plus petite, et de les placer entre eux dans le même ordre que ceux qu'ils représentent. Les opérations qu'il faut faire sur le terrain consistent principalement dans la mesure des angles de ces triangles; et, pour que ces angles puissent être rapportés directement sur la carte, ils doivent être chacun dans un plan horizontal, parallèle à celui de la carte. Si le plan de l'angle est oblique à l'horizon, ce n'est plus l'angle lui-même qu'il faut rapporter, c'est sa projection horizontale; et il est toujours possible de trouver cette projection, lorsqu'après avoir mesuré l'angle lui-même, on a de plus mesuré ceux que ses deux côtés forment avec l'horizon, ce qui donne lieu à l'opération suivante, qui est connue sous le nom de *réduction* d'un angle à l'horizon.

Neuvième question. Étant donnés l'angle formé par deux droites, et ceux qu'elles forment l'une et l'autre avec le plan horizontal, construire la projection horizontale du premier de ces angles.

Solution. Soient A (fig. 11) la projection horizontale du sommet de l'angle demandé, et AB celle d'un de ses côtés,

de manière qu'il faille construire l'autre côté AE. On concevra que le plan de projection verticale passe par AB; et ayant mené par le point A une verticale indéfinie A*a*, on prendra sur elle, à volonté, un point *d*, que l'on regardera comme la projection verticale du sommet de l'angle observé. Cela fait, si par le point *d* on mène la droite *d*B, qui fasse avec l'horizontale un angle *d*BA égal à celui que le premier côté fait avec l'horizon, le point B sera la rencontre de ce côté avec le plan horizontal. De même, si par le point *d* on mène la droite *d*C, qui fasse avec l'horizontale un angle *d*CA égal à celui que le deuxième côté fait avec l'horizon, et si du point A, comme centre, avec le rayon AC, on décrit un arc de cercle indéfini CEF, le deuxième côté ne pourra rencontrer le plan horizontal que dans un des points de l'arc CEF. Il ne s'agira donc plus que de trouver la distance de ce point à quelque autre point, comme B.

Or, cette dernière distance est dans le plan de l'angle observé. Si donc on mène la droite *d*D, de manière que l'angle D*d*B soit égal à l'angle observé, et si l'on porte *d*C de *d* en D, la droite DB sera égale à cette distance.

Donc, si du point B, comme centre, et d'un intervalle égal à BD, on décrit un arc de cercle, le point E, où il coupera le premier arc CEF, sera le point de rencontre du deuxième côté avec le plan horizontal; donc la droite AE sera la projection horizontale de ce côté, et l'angle BAE, celle de l'angle observé.

Les neuf questions qui précèdent suffisent à peine pour donner une idée de la méthode des projections; elles ne peuvent en montrer toutes les ressources. Mais à mesure que nous nous élèverons à des considérations plus générales, nous aurons soin de faire les opérations qui seront les plus propres à remplir cet objet.

II.

Des Plans tangens et des Normales aux surfaces courbes.

23. Comme il n'y a aucune surface courbe qui ne puisse être engendrée de plusieurs manières par le mouvement de lignes courbes, si par un point quelconque d'une surface, on considère deux génératrices différentes dans la position qu'elles doivent avoir, lorsqu'elles passent l'une et l'autre par ce point, et si l'on conçoit les tangentes en ce point à chacune des deux génératrices, le plan mené par ces deux tangentes est le *plan tangent*. Le point de la surface dans lequel les deux génératrices se coupent, et qui est en même temps commun aux deux tangentes et au plan tangent, est le point de contact de la surface et du plan.

La droite menée par le point de contact perpendiculairement au plan tangent s'appelle *normale* à la surface. Elle est perpendiculaire à l'élément de la surface, parce que la direction de cet élément coïncide dans tous les sens avec celle du plan tangent, qui peut en être regardé comme le prolongement.

24. La considération des plans tangens et des normales aux surfaces courbes est très utile à un grand nombre d'arts; et, pour plusieurs d'entre eux, elle est absolument indispensable. Nous n'apporterons ici qu'un seul exemple de chacun de ces deux cas, et nous les prendrons dans l'Architecture et dans la Peinture.

Les différentes parties dont sont composées les voûtes en pierres de taille se nomment *voussoirs;* et l'on appelle *joints* les faces par lesquelles deux voussoirs contigus se touchent, soit que ces voussoirs fassent partie d'une même assise, soit qu'ils soient compris dans deux assises consécutives.

La position des joints dans les voûtes est assujettie à plusieurs conditions qui doivent être nécessairement remplies. Nous ferons connaître successivement toutes ces conditions dans la suite du cours; mais, dans ce moment, nous ne nous occuperons que de celle qui a rapport à notre objet.

Une des conditions auxquelles la position des joints doit satisfaire, c'est qu'ils soient perpendiculaires entre eux, et que les uns et les autres rencontrent perpendiculairement la surface de la voûte. Si l'on s'écartait sensiblement de cette loi, non-seulement on blesserait les convenances générales, sans lesquelles rien ne peut avoir de la grâce, mais encore on s'exposerait à rendre la voûte moins solide et moins durable: car, si l'un des joints était oblique à la surface de la voûte, des deux vousssoirs contigus à ce joint, l'un aurait un angle obtus, l'autre un angle aigu, et dans la réaction que les deux voussoirs exercent l'un sur l'autre, ces deux angles ne seraient pas capables de la même résistance : à cause de la fragilité des matériaux, l'angle aigu serait exposé à éclater; ce qui altérerait la forme de la voûte, et compromettrait la durée de l'édifice. Ainsi la décomposition d'une voûte en voussoirs exige donc absolument la considération des plans tangens et des normales à la surface courbe de la voûte.

25. Passons à un autre exemple pris dans un genre qui, au premier coup d'œil, ne paraît pas susceptible d'une aussi grande sévérité.

On a coutume de regarder la Peinture comme composée de deux parties distinctes. L'une est l'art proprement dit: elle a pour objet d'exciter dans le spectateur une émotion déterminée, de faire naître en lui un sentiment donné, ou de le mettre dans la situation qui le disposera le mieux à recevoir une certaine impression; elle suppose dans l'artiste une grande habitude de la philosophie; elle exige de

sa part les connaissances les plus exactes sur la nature des choses, sur la manière dont elles agissent sur nous, et sur les signes, même involontaires, par lesquels cette action se manifeste ; elle ne peut être que le résultat d'une éducation très distinguée, que l'on ne donne à personne, et que nous sommes bien éloignés de donner à nos jeunes artistes ; elle n'est soumise à aucune règle générale ; elle ne suppose que des conseils.

L'autre partie de la Peinture en est, à proprement parler, le métier : son but est l'exécution exacte des conceptions de la première. Ici rien n'est arbitraire ; tout peut être prévu par un raisonnement rigoureux, parce que tout est le résultat nécessaire d'objets convenus et de circonstances données. Lorsqu'un objet est déterminé de forme et de position, lorsqu'on connaît la nature, le nombre et la position de tous les corps qui peuvent l'éclairer, soit par une lumière directe, soit par des rayons réfléchis ; lorsque la position de l'œil du spectateur est fixe ; lorsqu'enfin toutes les circonstances qui peuvent influer sur la vision sont bien établies et connues, la teinte de chacun des points de la surface visible de cet objet est absolument déterminée. Tout ce qui a rapport à la couleur de cette teinte et à son éclat dépend de la position du plan tangent en ce point à l'égard des corps éclairans et de l'œil du spectateur : elle peut être trouvée par le seul raisonnement ; et lorsqu'elle est ainsi déterminée, elle doit être appliquée avec exactitude. Tout affaiblissement, toute exagération changeraient les apparences, altéreraient les formes et produiraient un autre effet que celui qu'attend l'artiste.

Je sais bien que la rapidité de l'exécution, qui est souvent nécessaire, ne permettrait que bien rarement l'emploi d'une méthode qui priverait l'esprit de tout secours matériel, et l'abandonnerait à l'exercice de ses seules facultés, et qu'il est beaucoup plus facile au peintre de poser les objets,

d'observer leurs teintes et de les imiter : mais s'il était accoutumé à considérer les positions des plans tangens et les deux courbures des surfaces en chacun de leurs points, courbures qui feront l'objet de leçons ultérieures, il tirerait de ce moyen matériel un parti plus avantageux; il serait en état de rétablir les effets que l'omission de quelques circonstances a empêchés de naître, et de supprimer ceux auxquels donnent lieu des circonstances étrangères.

Enfin, les expressions vagues, comme celles de *méplat*, *clair-obscur*, que les peintres emploient à chaque instant, sont un témoignage constant du besoin qu'ils ont de connaissances plus exactes et de raisonnemens plus rigoureux.

26. Indépendamment de son utilité dans les arts, la considération des plans tangens et des normales aux surfaces courbes est un des moyens les plus féconds que la Géométrie descriptive emploie pour la résolution de questions qu'il serait très difficile de résoudre par d'autres procédés, et nous en donnerons quelques exemples.

27. La méthode générale pour déterminer le plan tangent à une surface courbe, consiste (23) à concevoir par le point du contact les tangentes à deux courbes génératrices différentes qui passeraient par ce point, et à construire le plan qui passerait par ces deux droites. Dans quelques cas particuliers, pour abréger les constructions, on s'écarte un peu de cette méthode prise à la lettre, mais on fait toujours l'équivalent.

Quant à la construction de la normale, nous ne nous en occuperons pas en particulier, parce qu'elle se réduit à celle d'une droite perpendiculaire au plan tangent, ce que nous savons faire.

28. *Première question.* Par un point considéré sur une surface cylindrique, et dont la projection horizontale est donnée, mener un plan tangent à cette surface.

Solution. Soient AB, *ab* (pl. 4, fig. 12), les projections

horizontale et verticale de la droite donnée, à laquelle la génératrice de la surface cylindrique doive être parallèle; soit EPD la courbe donnée dans le plan horizontal, sur laquelle la génératrice doive constamment s'appuyer, et que l'on peut regarder comme la trace de la surface cylindrique; enfin soit C la projection horizontale donnée du point considéré sur la surface cylindrique, par lequel doive être mené le plan tangent.

Cela posé, par le point considéré sur la surface, et dont la projection horizontale est en C, concevons la droite génératrice dans la position qu'elle doit avoir, lorsqu'elle passe par ce point : cette génératrice étant une ligne droite, elle sera elle-même sa propre tangente; elle sera donc une des deux droites qui détermineront la position du plan tangent : de plus, elle sera parallèle à la droite donnée; donc ses deux projections seront respectivement parallèles à AB et *ab*; donc si par le point C on mène à AB une parallèle indéfinie EF, on aura la projection horizontale de la génératrice. Pour avoir sa projection verticale, concevons la génératrice prolongée sur la surface cylindrique jusqu'à ce qu'elle rencontre le plan horizontal; elle ne le pourra faire que dans un point qui sera en même temps sur la projection EF et sur la courbe EPD, et qui sera, par conséquent, l'intersection de ces deux lignes : ainsi l'on déterminera ce point, en prolongeant EF jusqu'à ce qu'elle coupe quelque part la courbe EPD.

Ici il se présente deux cas : ou la droite EF ne coupera la trace du cylindre qu'en un seul point, ou elle la coupera en plusieurs points. Nous allons examiner ces deux cas séparément, et supposer d'abord que, quelque prolongée que soit la droite EF, elle ne rencontre la courbe EPD qu'en un seul point D.

Le point D étant la trace de la génératrice, si on le projette sur le plan vertical au moyen de la perpendiculaire

D*d*, et si par le point *d* on mène *df* parallèle à *ab*, ou aura la projection verticale de la génératrice. Ainsi on aura les deux projections d'une des droites par lesquelles doit passer le plan tangent demandé. De plus, la projection verticale du point de contact doit se trouver sur la droite C*c'* menée du point donné C perpendiculairement à LM; elle doit aussi se trouver sur *df;* donc elle sera au point *c* d'intersection de ces deux lignes.

Si la droite EF coupe la trace EPD de la surface cylindrique en plusieurs points D, E, on opérera pour chacun de ces points de la même manière que nous venons de le décrire pour le point D, regardé comme seul; il en résultera seulement qu'on aura les projections verticales *df*, *ef*, d'autant de droites génératrices, et les projections verticales *c*, *c'*, d'autant de points de contact qu'il y aura de points d'intersection entre la droite EF et la trace EPD.

Dans le cas de la fig. 12, la trace de la surface cylindrique est une circonférence de cercle qui a la propriété d'être coupée par une droite en deux points : ainsi la verticale élevée par le point donné C doit rencontrer deux fois la surface, d'abord dans un premier point, dont la projection verticale est *c*, et par laquelle passe la génératrice lorsqu'elle s'appuie sur le point D, et ensuite dans un second point, dont la projection verticale est *c'*, et par laquelle passe la génératrice lorsqu'elle s'appuie sur le point E de la trace. Ces deux points, quoiqu'ils aient la même projection horizontale, sont néanmoins très distincts, et à chacun d'eux doit répondre un plan tangent particulier. Actuellement, pour chacun des deux points de contact, il faut trouver la deuxième droite qui doit déterminer la position du plan tangent. Si l'on suivait strictement la méthode générale, en regardant la trace comme une seconde génératrice, il faudrait la concevoir passant successivement par chacun des points de contact, et construire dans chacun de ces points

une tangente; mais, dans le cas particulier des surfaces cylindriques, on peut employer une considération plus simple. En effet, le plan tangent au point C, *c*, touche la surface dans toute l'étendue de la droite génératrice qui passe par ce point; il la touche donc en D, qui est un point de cette génératrice; il doit donc passer par la tangente à la trace au point D. Par un semblable raisonnement on trouvera que le plan tangent en C, *c'*, doit passer par la tangente à la trace en E. Donc, si par les deux points D, E, on mène à la trace les deux tangentes DK, EG, prolongées jusqu'à ce qu'elles coupent la droite LM en deux points K, G, on aura sur le plan horizontal les traces des deux plans tangens.

Il ne reste donc plus à trouver que les traces des mêmes plans sur le plan vertical; et parce que nous avons déjà pour l'une de ces traces le point K, et pour l'autre le point G, il ne reste plus à déterminer qu'un seul point pour chacune d'elles.

Pour cela, et en opérant pour le premier des deux plans tangens, concevons que le point à construire soit celui dans lequel une horizontale menée dans le plan par le point de contact rencontre le plan vertical; on aura la projection horizontale de cette droite en menant par le point C une parallèle à la trace DK, qu'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite LM en un point I; et l'on aura sa projection verticale en menant par le point *c* une horizontale indéfinie. Le point de rencontre du plan vertical avec l'horizontale se trouvera donc en même temps et sur la verticale I*i* et sur l'horizontale *ci;* il sera au point *i* de leur intersection; donc, si par les points *i* et K on mène une droite, on aura la trace du premier plan tangent sur le plan vertical. En raisonnant de même pour le second plan tangent, on trouvera sa trace sur le plan vertical en menant par le point C une droite CH parallèle à la trace horizontale EG, et on la

prolongera jusqu'à ce qu'elle coupe LM en un point H, par lequel on élèvera la verticale H*h*; par le point *e'* on mènera une horizontale qui coupera la verticale H*h* en un point *h*, par lequel et par le point G si l'on mène une droite G*h*, on aura la trace demandée.

29. *Deuxième question.* Par un point considéré sur une surface conique, et dont la projection horizontale est donnée, mener un plan tangent à cette surface.

La solution de cette question ne diffère de celle de la précédente qu'en ce que la droite génératrice, au lieu d'être toujours parallèle à elle-même, passe toujours par le sommet dont les deux projections sont données. Nous pensons qu'il est convenable de ne pas l'énoncer ici, et de conseiller au lecteur de la chercher lui-même, en lui offrant le secours de la fig. 13, si toutefois cela était nécessaire.

30. *Troisième question.* Par un point considéré sur une surface de révolution autour d'un axe vertical, et donné sur la projection horizontale, mener un plan tangent à la surface.

Solution. Soient A (pl. 5, fig. 14) la projection horizontale donnée de l'axe, *aa'* sa projection verticale, BCDEF la courbe génératrice donnée, considérée dans un plan mené par l'axe, et G la projection horizontale donnée du point de contact.

Cela posé, si par le point de contact et par l'axe on conçoit un plan vertical dont la projection sera l'horizontale indéfinie AG, ce plan coupera la surface de révolution dans une courbe qui sera la génératrice, passant par le point de contact; si par le point G on conçoit une verticale, elle rencontrera la génératrice et par conséquent la surface en un ou plusieurs points qui seront autant de points de contact, dont G sera la projection horizontale commune. On trouvera tous ces points de contact considérés dans le plan de la génératrice en portant AG sur LM, de *a* en *e*, et en me-

nant par le point e une parallèle à aa'; tous les points E, C, dans lesquels cette droite coupera la courbe BCDEF, seront les intersections de la courbe génératrice avec la verticale menée par le point G, et indiqueront les hauteurs d'autant de points de contact au-dessus du plan horizontal. Pour avoir les projections verticales de ces points de contact, on mènera par tous les points E, C, des horizontales indéfinies, qui contiendront ces projections : mais elles doivent aussi se trouver sur la perpendiculaire à LM, menée par le point G; donc les intersections g, g', de cette droite avec les horizontales seront les projections des différens points de contact.

Actuellement, si, par chaque point de contact, on conçoit une section faite par un plan horizontal, cette section, qui pourra être regardée comme une seconde génératrice, sera la circonférence d'un cercle dont le centre sera dans l'axe, et dont la tangente, qui doit être perpendiculaire à l'extrémité du rayon, sera aussi perpendiculaire au plan vertical mené par AG, et dans lequel se trouve le rayon : donc le plan tangent, qui doit passer par cette tangente, sera aussi perpendiculaire à ce même plan vertical, et aura, sur le plan horizontal, sa trace perpendiculaire à AG. Il ne reste donc plus, pour avoir la trace de chacun des plans tangens, que de trouver sa distance au point A : or, si par les points E, C, on mène à la première génératrice les tangentes EI, CH, prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent LM en des points I, H, les droites aI, aH, seront égales à ces distances; donc, si l'on porte ces droites de A en i et de A en h, et si par les points i et h on mène à AG des perpendiculaires iQ, hP, prolongées jusqu'à la rencontre de la droite LM, on aura, sur le plan horizontal, les traces de tous les plans tangens.

Pour trouver sur le plan vertical les traces des mêmes plans, il faut concevoir, par chaque point de contact, et

dans le plan tangent correspondant, une horizontale prolongée jusqu'au plan vertical de projection; cette droite, qui n'est autre chose que la tangente au cercle, déterminera sur ce plan un point qui appartiendra à la trace. Or, pour tous les points de contact, ces droites ont la même projection horizontale; c'est la droite GK, menée par le point G perpendiculairement à AG, et terminée à la droite LM. Donc si par le point K on mène à LM une perpendiculaire indéfinie K*kk'*, elle contiendra tous les points de rencontre des horizontales avec le plan vertical de projection. Mais ces points de rencontre doivent aussi se trouver sur les horizontales respectives menées par les points E, C; donc les intersections *k*, *k'*, de ces horizontales avec la verticale K*k'* seront chacun un point de la trace d'un des plans tangens. Ainsi la droite Q*k* sera, sur le plan vertical, la trace d'un des plans tangens; la droite P*k'* sera la trace de l'autre; et ainsi de suite, s'il y en avait un plus grand nombre.

Nous nous bornerons, dans ce moment, aux trois exemples précédens, parce qu'ils suffisent pour toutes les surfaces dont nous avons défini la génération. Dans la suite de cet écrit, nous aurons occasion de considérer les générations de familles de surfaces infiniment plns nombrenses, et, à mesure qu'elles se présenteront, nous appliquerons la même méthode à la détermination de leurs plans tangens et de leurs normales. Maintenant nous allons proposer une question dans la solution de laquelle on peut employer d'une manière utile la considération d'un plan tangent.

31. *Quatrième question.* Deux droites étant données (fig. 15), par leurs projections horizontales AB, CD, et par leurs projections verticales *ab*, *cd*, construire les projections PN, *pn*, de leur plus courte distance, c'est-à-dire de la droite qui est en même temps perpendiculaire à l'une et à l'autre, et trouver la grandeur de cette distance.

Solution. Par la première des deux droites données, concevons un plan parallèle à la seconde, ce qui est toujours possible, puisque si par un point quelconque de la première on mène une droite parallèle à la seconde, et si l'on conçoit que cette troisième droite se meuve parallèlement à elle-même le long de la première, elle engendrera le plan dont il s'agit. Concevons de plus une surface cylindrique à base circulaire, qui ait pour axe la seconde droite donnée, et pour rayon la distance cherchée; cette surface sera touchée par le plan en une droite qui sera parallèle à l'axe, et qui coupera la première droite en un point. Si par ce point on mène une perpendiculaire au plan, elle sera la droite demandée; car elle passera de fait par un point de la première droite donnée, et elle lui sera perpendiculaire, puisqu'elle sera perpendiculaire à un plan qui passe par cette droite : elle coupera de plus la seconde droite perpendiculairement, puisqu'elle sera un rayon du cylindre dont cette seconde droite est l'axe.

Il ne s'agit donc plus que de construire successivement toutes les parties de cette solution.

1°. Pour construire les traces du plan parallèle aux deux droites données, on mènera par un point quelconque de la première une parallèle à la seconde; les projections de cette parallèle seront parallèles aux droites CD, *cd*. La droite *cd* coupant la droite *ab* au point *b*, si l'on abaisse de ce point la perpendiculaire *bb'*B sur l'intersection commune LM des plans de projections, et si l'on mène par le point de la première droite, dont les projections sont B et *b*, la parallèle à la seconde droite, cette parallèle aura pour projections horizontale et verticale les droites BE, *cd*; elle rencontrera le plan horizontal au point E, qu'on obtient en menant la droite *c*E perpendiculairement à l'intersection commune LM. Donc si l'on joint les points A et E par une droite, cette droite sera la trace du plan parallèle aux deux droites données.

2°. Pour construire la ligne de contact du plan parallèle aux deux droites données avec la surface cylindrique, il faut observer que cette ligne de contact est parallèle à la seconde droite donnée, et qu'nn seul point de cette ligne détermine sa position. Pour trouver ce point, on mène par un point quelconque de la seconde droite qui est l'axe du cylindre (par exemple, par le point C, où elle rencontre le plan horizontal), un plan perpendiculaire à cet axe; l'intersection de ce plan avec le plan parallèle aux deux droites est la ligne de contact de ce dernier plan avec la base circnlaire de la surface cylindrique.

Le plan vertical CD ayant tourné autonr de sa trace CD pour s'appliquer sur le plan horizontal, on construira l'angle $\beta'C\beta$ que la seconde droite donnée fait aveo le plan horizontal, en prenant une verticale $\beta'\beta$ égale à $b'b$. Le même plan vertical CD coupe le plan parallèle aux deux droites, snivant la droite FK parallèle à $C\beta'$. D'où il suit que le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre mené par le point C coupe le plan vertical CD suivant la droite GK perpendiculaire à $C\beta'$ on à FK, et le plan horizontal snivant la droite CH perpendiculaire à CD.

Ce plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, tonrnant autour de sa trace horizontale CH pour venir s'appliquer sur le plan horizontal, le point K s'abaisse en K'; le point H de la trace AE reste fixe, et la droite HK' est l'intersection du plan tangent à la surface cylindrique, et du plan perpendiculaire à l'axe de cette surface. Donc, si du point C on abaisse la perpendiculaire CI sur cette droite HK', le cercle décrit du point C comme centre, avec le rayon CI, est la base de la surface cylindrique, et la droite IN, parallèle à CD, cst la projection horizontale de l'arète de contact. Cette arète coupe la première droite en un point dont les projections sont N et n, et par lequel passe la perpendiculaire aux deux droites données.

3°. Connaissant les projections N, n, d'un des points de la perpendiculaire commune demandée, pour avoir celle de cette perpendiculaire, il suffira de mener, par le point N, la droite NPQ perpendiculaire à la trace AE. Cette droite coupe la projection horizontale CD de la seconde droite donnée au point P, extrémité de la projection horizontale NP de la perpendiculaire demandée. La projection verticale de cette perpendiculaire étant np, on en construira la grandeur par le procédé de la fig. 3, pl. 1.

La considération d'une surface cylindrique touchée par un plan n'était point nécessaire pour la solution de la question précédente. Après avoir imaginé un plan parallèle aux deux droites données, on aurait pu, par chacune de ces droites, mener à ce plan un plan perpendiculaire; et l'intersection de ces deux derniers plans aurait été la direction de la plus courte distance demandée. Nous nous contenterons d'énoncer cette seconde manière, en conseillant au lecteur d'en chercher la construction pour s'exercer.

32. Dans les différentes questions que nous avons résolues sur les plans tangens aux surfaces courbes, nous avons toujours supposé que le point par lequel il fallait mener le plan tangent était pris sur la surface, et qu'il était lui-même le point de contact : cette condition seule suffisait pour déterminer la position du plan. Mais il n'en est pas de même lorsque le point par lequel le plan doit passer est pris hors de la surface.

Pour que la position d'un plan soit déterminée, il faut qu'il satisfasse à trois conditions différentes, équivalentes chacune à celle de passer par un point donné : or, en général, la propriété d'être tangent à une surface courbe donnée lorsque le point de contact n'est pas indiqué, n'équivaut qu'à une seule de ces conditions. Si donc c'est par des conditions de cette nature que l'on se propose de déterminer la position d'un plan, il en faut, en général, trois. En effet;

supposons que nous ayons trois surfaces courbes données, et qu'un plan soit tangent à l'une d'entre elles, en un point quelconque; nous pouvons concevoir que ce plan se meuve autour de la surface, sans cesser de la toucher : il pourra le faire dans toutes sortes de sens; seulement le point de contact se mouvra sur la surface à mesure que le plan tangent changera de position, et la direction du mouvement du point de contact sera dans le même sens que celle du mouvement du plan. Concevons que ce mouvement se fasse dans un certain sens jusqu'à ce que le plan rencontre la seconde surface et la touche en un certain point; alors le plan sera en même temps tangent aux deux premières surfaces, et sa position ne sera pas encore arrêtée. Nous pouvons en effet concevoir que le plan tourne autour des deux surfaces, sans cesser de les toucher l'une et l'autre. Il ne sera plus libre, comme auparavant, de se mouvoir dans toutes sortes de sens, et il ne pourra plus le faire que dans un seul. A mesure que le plan changera de position, les deux points de contact se mouvront chacun sur la surface à laquelle il appartient; de manière que si l'on conçoit une droite menée par ces deux points, leurs mouvemens seront dans le même sens par rapport à cette droite, quand le plan touchera les deux surfaces du même côté; et ils seront dans des sens contraires, quand le plan touchera les deux surfaces, l'une d'un côté, l'autre de l'autre. Enfin concevons que ce mouvement, qui est le seul qui puisse avoir encore lieu, continue jusqu'à ce que le plan touche la troisième surface en un certain point : alors la position du plan sera arrêtée, et il ne pourra plus se mouvoir sans cesser d'être tangent à l'une des trois surfaces.

On voit donc que pour déterminer la position d'un plan, au moyen de contacts indéterminés avec des surfaces courbes données, il en faut en général trois. Ainsi, si l'on se proposait de mener un plan tangent à une surface courbe donnée,

cette condition n'équivaudrait qu'à une seule des trois auxquelles le plan peut satisfaire : on pourrait donc encore en prendre deux autres à volonté, et, par exemple, faire passer le plan par deux points donnés, ou, ce qui revient au même, par une droite donnée. S'il fallait que le plan fût tangent en même temps à deux surfaces, il y aurait deux conditions employées ; il n'y en aurait plus qu'une disponible, et l'on ne pourrait assujettir de plus le plan qu'à passer par un point donné. Enfin, si le plan devait toucher en même temps trois surfaces données, on ne pourrait plus disposer d'aucune condition, et sa position serait déterminée.

Ce que nous venons de dire regarde les surfaces courbes en général; il faut néanmoins en excepter ce qui a rapport à toutes les surfaces cylindriques, à toutes les surfaces coniques et à toutes les surfaces développables; car, pour ce genre de surface, le contact avec un plan n'est pas réduit à un point unique; il s'étend tout le long d'une droite indéfinie qui se confond avec la génératrice dans une de ses positions. La propriété qu'aurait un plan de toucher une seule de ces surfaces équivaudrait à deux conditions, puisqu'elle l'assujettirait à passer par une droite; et il ne resterait plus qu'une seule condition disponible, comme, par exemple, de passer par un point donné. On ne pourrait donc pas proposer de mener un plan qui fût en même temps tangent à deux de ces surfaces, et à plus forte raison à trois, à moins qu'il n'y eût quelques circonstances particulières qui rendissent ces conditions compatibles.

33. Il n'est peut-être pas inutile, avant que d'aller plus loin, de donner quelques exemples de la nécessité où l'on peut être de mener des plans tangens à des surfaces courbes par des points pris au dehors d'elles. Nous prendrons le premier de ces exemples dans la construction des fortifications.

Lorsqu'on expose les principes généraux de la fortifica-

tion, on suppose d'abord que, dans tous les sens, le terrain qui environne la place forte à la portée du canon soit horizontal et ne présente ancune éminence qui puisse donner quelque avantage à l'assiégeant; puis, dans cette hypothèse, on détermine le tracé du corps de place, des demi-lunes, des chemins couverts et des ouvrages avancés; et l'on indique les commandemens que les différentes parties de la fortification doivent avoir les unes sur les autres, afin qu'elles contribuent toutes, de la manière la plus efficace, à leur défense réciproque. Ensuite, pour faire l'application de ces principes au cas où le terrain qui environne la place présenterait quelqne hauteur dont l'assiégeant pourrait profiter, et de laquelle il fandrait que la fortification fût défilée, il ne reste plus qu'une considération nouvelle. S'il n'y a qu'une senle hauteur, on choisit dans la place deux points par lesquels on conçoit un plan tangent à la hauteur de laquelle on veut se défiler : ce plan tangent se nomme *plan de défilement;* et l'on donne à toutes les parties de la fortification le même relief an-dessns du plan de défilement, qu'elles auraient eu au-dessus du plan horizontal, si le terrain eût été de niveau : par là elles ont les unes sur les autres, et toutes ensemble sur la hauteur voisine, le même commandement que snr un terrain horizontal; et la fortification a les mêmes avantages que dans le premier cas. Quant au choix des deux points par lesquels doit passer le plan de défilement, il doit satisfaire aux deux conditions suivantes : 1° que l'angle formé par le plan avec l'horizon soit le plus petit possible, afin que les terre-pleins ayant moins de pente, le service de la défense rencontre moins de difficultés : 2° que le relief de la fortification au-dessus du terrain naturel soit aussi le plus petit possible, afin que sa construction entraîne moins de travail et moins de dépense.

Si, dans les environs de la place, il y a deux hautenrs desquelles la fortification doive être en même temps défilée,



le plan de défilement doit être en même temps tangent aux surfaces de ces deux éminences : il ne reste plus, pour fixer sa position, qu'une seule condition disponible, et l'on en dispose; c'est-à-dire, on choisit dans la place le point par lequel ce plan doit passer, de manière que l'on satisfasse le mieux possible aux conditions énoncées dans le premier cas.

34. Le second exemple que nous rapporterons sera encore pris dans la Peinture.

Les surfaces des corps, surtout lorsqu'elles sont polies, présentent des points brillans, d'un éclat comparable à celui du corps lumineux qui les éclaire. La vivacité de ces points est d'autant plus grande, et leur étendue est d'autant plus petite, que les surfaces sont plus polies. Lorsque les surfaces sont mates, les points brillans ont beaucoup moins d'éclat, et ils occupent une partie plus grande de la surface.

Pour chaque surface, la position du point brillant est déterminée par la condition suivante : que le rayon de lumière incident, et le rayon réfléchi dirigé à l'œil du spectateur, soient dans un même plan perpendiculaire au plan tangent en ce point, et fassent avec ce plan des angles égaux, parce que le point brillant de la surface fait fonction de miroir, et renvoie à l'œil une partie de l'image de l'objet lumineux. La détermination de ce point exige une extrême précision; et quand même le dessin serait de la plus grande correction, quand même les contours apparens seraient tracés avec une exactitude mathématique, la moindre erreur commise dans la position du point brillant en apporterait de très grandes dans l'apparence des formes. Nous n'en apporterons qu'une seule preuve, mais bien frappante.

La surface du globe de l'œil est polie; elle est de plus enduite d'une légère couche d'humidité qui en rend le poli plus parfait; aussi lorsqu'on observe un œil ouvert, on voit sur sa surface un point brillant d'un grand éclat, d'une très

petite étendue, et dont la position dépend de celle de l'objet éclairant et de l'observateur. Si la surface de l'œil était parfaitement sphérique, l'œil pourrait tourner autour de son axe vertical, sans que la position du point brillant éprouvât le moindre changement : mais cette surface est allongée dans le sens de l'axe de la vision ; et lorsqu'elle tourne autour de l'axe vertical, la position du point brillant change. Un long exercice nous ayant rendus très sensibles à ce changement, il entre pour beaucoup dans le jugement que nous portons sur la direction du globe de l'œil. C'est principalement par la différence des positions des points brillans sur les globes des deux yeux d'une personne, que nous jugeons si elle louche ou si elle ne louche pas ; que nous reconnaissons qu'elle nous regarde, et, lorsqu'elle ne nous regarde pas, de quel côté elle porte la vue.

En rapportant cet exemple, nous ne prétendons pas que, dans un tableau, il faille déterminer géométriquement la position du point brillant sur le globe de l'œil ; nous avons seulement l'intention de faire voir comment de légères erreurs dans la position de ce point en apportent de considérables dans la forme apparente de l'objet, quoique d'ailleurs le tracé de son contour apparent reste le même.

35. Passons actuellement à la détermination des plans tangens aux surfaces courbes menées par des points pris au dehors d'elles.

La surface de la sphère est une des plus simples que l'on puisse considérer ; elle a des générations communes avec un grand nombre de surfaces différentes : on pourrait, par exemple, la ranger parmi les surfaces de révolution, et ne rien dire de particulier pour elle. Mais sa régularité donne lieu à des résultats remarquables, dont quelques-uns sont piquans par leur nouveauté, et dont nous allons nous occuper d'abord, moins pour eux-mêmes, que pour acquérir, dans l'observation des trois dimensions, une habitude dont

nous aurons besoin pour des objets plus généraux et plus utiles.

36. *Première question.* Par une droite donnée, mener un plan tangent à la surface d'une sphère donnée.

Solution. Première manière. Soient A et *a* (pl. 6, fig. 16) les deux projections du centre de la sphère ; BCD, la projection du grand cercle horizontal ; EF et *ef*, les deux projections indéfinies de la droite donnée. Soit conçu, par le centre de la sphère, un plan perpendiculaire à la droite, et soient construites, par la méthode que nous avons donnée (fig. 6), les projections G et *g* du point de rencontre de la droite avec le plan.

Cela posé, il est évident que, par la droite donnée, on peut mener à la sphère deux plans tangens dont le premier la touchera d'un côté, le second la touchera de l'autre, et entre lesquels elle sera placée ; ce qui déterminera deux points de contact différens, dont il s'agit d'abord de construire les projections.

Pour cela, si, du centre de la sphère, on conçoit une perpendiculaire abaissée sur chacun des deux plans tangens, chacune d'elles aboutira au point de contact de la surface de la sphère avec le plan correspondant ; et elles seront toutes deux dans le plan perpendiculaire à la droite donnée : donc les deux points de contact seront dans la section de la sphère par le plan perpendiculaire ; section qui sera la circonférence d'un des grands cercles de la sphère, et à laquelle seront tangentes les deux sections faites dans les plans tangens par le même plan.

Si, dans le plan perpendiculaire, et par le centre de la sphère, on conçoit une horizontale, dont on aura la projection verticale en menant l'horizontale *ah*, et dont on aura l'autre projection en abaissant sur EF la perpendiculaire AH ; et si l'on conçoit que le plan perpendiculaire tourne autour de cette horizontale comme charnière, jus-

qu'à ce qu'il devienne lui-même horizontal, il est évident que sa section avec la surface de la sphère viendra se confondre avec la circonférence BCD, que les deux points de contact seront alors sur cette circonférence, et que, si l'on construisait le point J, où la rencontre du plan perpendiculaire avec la droite donnée vient s'appliquer par ce mouvement, les tangentes JC, JD, menées au cercle BCD, détermineraient ces deux points de contact dans la position où on les considère alors. Or, il est facile de construire le point J, ou, ce qui revient au même, de trouver sa distance au point H : car la projection horizontale de cette distance est GH, et la différence des hauteurs verticales de ses extrémités est *gg'*; donc, si l'on porte GH sur l'horizontale *ah* de *g'* en *h*, l'hypoténuse *hg* sera la grandeur de cette distance; donc portant *gh* sur EF de H en J, et menant les deux tangentes JC, JD, les deux points de contact C, D, seront déterminés dans la position qu'ils ont prise lorsque le plan perpendiculaire a été abattu sur le plan horizontal.

Actuellement, pour trouver leurs projections dans la position qu'ils doivent avoir naturellement, il faut concevoir que le plan perpendiculaire retourne à sa position primitive, en tournant encore autour de l'horizontale AH comme charnière, et qu'il entraîne avec lui le point J, les deux tangentes, JC, JD, prolongées jusqu'à ce qu'elles coupent AH en des points K, K', et la corde CD qui coupera aussi la même droite AH en un point N. Il est évident que, dans ce mouvement, les points K, K' et N, qui sont sur la charnière, seront fixes, et que les deux points de contact C, D, décriront des arcs de cercle qui seront dans des plans perpendiculaires à la charnière, et dont on aura les projections horizontales, en abaissant des points C, D, sur AH, les perpendiculaires indéfinies CP, DQ. Donc les projections horizontales des deux points de contact se trouveront sur

les deux droites CP, DQ. Mais dans le mouvement rétrograde du plan perpendiculaire, les deux tangentes JCK', JKD, ne cessent pas de passer par les points de contact respectifs : et lorsque ce plan est parvenu dans sa position primitive, le point J se trouve de nouveau projeté en G, et les deux tangentes sont projetées suivant les droites GK', GK. Donc ces deux dernières droites doivent aussi contenir chacune la projection horizontale d'un des points de contact; donc enfin les intersections de ces deux droites, avec les droites respectives CP, DQ, détermineront les projections horizontales R et S des deux points de contact qui se trouveront avec le point N sur une même ligne droite.

Pour trouver les projections verticales des mêmes points, on mènera d'abord sur LM les perpendiculaires indéfinies R*r*, S*s*; puis, si l'on projette les points K, K', en *k*, *k'*, et si, par le point *g*, on mène les droites *gk*, *gk'*, on aura les projections verticales des deux mêmes tangentes. Ces droites contiendront donc les projections des points de contact respectifs; donc les points *r*, *s*, de leurs intersections avec les verticales R*r*, S*s*, seront les projections demandées.

Les projections horizontales et verticales des deux points de contact étant trouvées, pour construire sur le plan horizontal les traces des deux plans tangens, on concevra, par chacun des points de contact, une parallèle à la droite donnée. Ces droites seront dans les plans tangens respectifs, et l'on aura leurs projections horizontale et verticale en menant RU, SV, parallèles à EF, et *ru*, *sv*, parallèles à *ef*. On construira, sur le plan horizontal, la trace T de la droite donnée, et les traces U, V, des deux dernières droites; et les droites TU, TV, seront les traces des deux plans tangens.

Au lieu de concevoir, par les points de contact, de nouvelles lignes droites, on pourrait trouver les traces des deux tangentes GR, GS, qui rempliraient le même but.

Quant aux traces des deux mêmes plans avec le plan vertical, on les trouvera par la méthode que nous avons déjà souvent employée.

Cette solution pourrait être rendue beaucoup plus élégante, en faisant passer les deux plans de projection par le centre même de la sphère. Par là, les deux projections de la sphère se confondraient dans le même cercle, et les prolongemens des lignes droites seraient moins longs. Nous n'avons séparé les deux projections que pour mettre plus de clarté dans l'exposition. Il est facile actuellement de donner à la construction toute la concision dont elle est susceptible.

37. *Seconde manière.* Soient A et *a* (fig. 17) les deux projections du centre de la sphère, AB ou *ab* son rayon, BCD la projection de son grand cercle horizontal, et EF, *ef*, les projections de la droite donnée. Si l'on conçoit le plan du grand cercle horizontal prolongé jusqu'à ce qu'il coupe la droite donnée en un certain point, on aura la projection verticale de ce plan en menant par le point *a* l'horizontale indéfinie *bag*; le point *g*, où cette horizontale coupera *ef*, sera la projection verticale du point de rencontre du plan avec la droite donnée, et l'on aura la projection horizontale G de ce point, en projetant *g* sur EF.

Cela posé, si, en prenant ce même point pour sommet, on conçoit une surface conique qui enveloppe la sphère, et dont toutes les droites génératrices la touchent chacune en un point, on aura les projections des deux droites génératrices horizontales de cette surface conique, en menant par le point G les deux droites GC, GD, tangentes au cercle BCD, et qui le toucheront en deux points C, D, qu'il sera facile de déterminer. La surface conique touchera celle de la sphère dans la circonférence d'un cercle, dont la droite CD sera le diamètre, dont le plan sera perpendiculaire à l'axe du cône, et par conséquent vertical, et dont la projection horizontale sera la droite CD.

Si, par la droite donnée, on conçoit deux plans tangens à la surface conique, chacun d'eux la touchera suivant une de ces droites génératrices, qui sera en même temps sur la surface conique et sur le plan, et parce que cette droite génératrice touche aussi la surface de la sphère, et un de ces points qui se trouve sur la circonférence du cercle projeté en CD, il s'ensuit que ce point est en même temps sur la surface conique, sur le plan qui la touche, sur la surface de la sphère, et sur la circonférence du cercle projeté en CD, et qu'il est un point de contact commun à tous ces objets. Donc, 1° les deux plans tangens à la surface conique sont aussi tangens à la surface de la sphère, et sont ceux dont il faut déterminer la position; 2° leurs points de contact avec la sphère, étant dans la circonférence du cercle projeté en CD, seront eux-mêmes projetés quelque part sur cette droite; 3° la droite qui passe par les deux points de contact, étant comprise dans le plan du même cercle, sera projetée elle-même indéfiniment sur CD.

Actuellement, faisons pour le plan d'un grand cercle parallèle à celui de la projection verticale, la même opération que nous venons de faire pour le plan du grand cercle horizontal. La projection horizontale de ce plan sera la droite BAH, indéfiniment parallèle à LM; le point où il rencontre la droite donnée sera projeté horizontalement à l'intersection H des deux droites EF, BAH; et l'on aura sa projection verticale en projetant le point H sur *ef* en *h*. Si l'on conçoit une nouvelle surface conique dont le sommet soit en ce point de rencontre, et qui enveloppe la sphère comme la première, on aura les projections verticales des deux droites génératrices extrêmes de cette surface, en menant par le point *h*, au cercle *b*KI, les tangentes *h*K, *h*I, qui le toucheront en des points K, I, que l'on déterminera. Cette seconde surface conique touchera celle de la sphère dans la circonférence d'un nouveau cercle dont KI sera le dia-

mètre et dont le plan, qui sera perpendiculaire à celui de la projection verticale, sera par conséquent projeté indéfiniment sur KI. La circonférence de ce cercle passera aussi par les deux points de contact de la sphère avec les plans tangens demandés; donc les projections verticales de ces deux points de contact seront quelque part sur KI; donc aussi la droite qui joint ces deux points sera projetée sur la même droite KI.

Ainsi la droite menée par les deux points de contact est projetée horizontalement sur CD, et verticalement sur KI; elle rencontre le plan du grand cercle horizontal en un point dont la projection verticale est à l'intersection *n* de KI, avec *bag*, et dont on aura la projection horizontale N en projetant le point *n* sur CD.

Cela fait, concevons que le plan du cercle vertical, projeté en CD, tourne autour de son diamètre horizontal comme charnière, pour devenir lui-même horizontal, et qu'il entraîne avec lui, dans son mouvement, les deux points de contact par lesquels passe sa circonférence, et la droite qui joint ces deux points. On construira ce cercle dans cette nouvelle position, en décrivant sur CD, comme diamètre, le cercle CPDQ; et si l'on construisait la position que prend la droite des deux points de contact, elle couperait la circonférence CPDQ en deux points, qui les détermineraient sur cette circonférence considérée dans sa position horizontale.

Or, le point N de la droite des deux contacts, étant sur la charnière CD, ne change pas de position dans le mouvement. Cette droite doit donc encore passer par ce point, lorsqu'elle est devenue horizontale. De plus, le point où elle rencontre le plan du grand cercle parallèle à la projection verticale, point dont la projection horizontale est à la rencontre O des deux droites CD, BAH, et dont on aura la projection verticale *t* en projetant le point O sur KI; ce

point, dis-je, dans son mouvement autour de la charnière CD, décrit un quart de cercle vertical perpendiculaire à CD, et dont le rayon est la verticale *ot*; donc, si l'on mène par le point O, une perpendiculaire à CD, et si, sur cette perpendiculaire, on porte *ot* de O en T, le point T sera un de ceux de la droite des contacts, lorsqu'elle est devenue horizontale. Donc, si, par les points N et T, on mène une droite, ces deux points de rencontre P, Q, avec la circonférence CPDQ, seront les deux points de contact considérés dans le plan vertical abattu.

Pour avoir les projections horizontales des deux mêmes points dans leurs positions naturelles, il faut concevoir que le cercle CPDQ retourne dans sa position primitive en tournant sur la même charnière CD. Dans ce mouvement, les deux points P, Q, décriront des quarts de cercle dans des plans verticaux perpendiculaires à CD, et dont les projections horizontales seront les perpendiculaires PR et QS, abaissées sur CD. Donc les projections horizontales des deux points de contact seront respectivement sur les droites PR et QS : or, nous avons vu qu'elles devaient être aussi sur CD; donc elles seront aux deux points de rencontre R et S.

On aura les projections verticales *r*, *s*, des deux mêmes points, en projetant les points R et S, sur KI, ou, ce qui revient au même, en portant sur les verticales R*r*, S*s*, à partir de l'horizontale *bag*, *r'r* égale à PR, et *s's* égale à QS.

Les projections horizontales et verticales des deux points de contact étant construites, on déterminera les traces des deux plans tangens, comme dans la première solution.

Cette seconde solution peut aussi être rendue beaucoup plus concise en faisant passer les plans de projection par le centre de la sphère, ce qui réduit les deux projections à une même figure.

38. Ces dernières considérations vont nous conduire à la découverte de quelques propriétés remarquables du cercle,

de la sphère, des sections coniques, et des surfaces courbes du second degré.

Nous venons de voir que les deux surfaces coniques circonscrites à la sphère, la touchaient chacune dans la circonférence d'un cercle, et que ces circonférences passaient toutes deux par les deux points de contact de la sphère avec les plans tangens. Cette propriété n'est point particulière aux deux surfaces coniques que nous avons considérées; elle convient à toutes celles qui auraient leur sommet dans la droite donnée, et qui seraient de même circonscrites à la sphère. Donc, si l'on conçoit une première surface conique qui, ayant son sommet sur la droite donnée, soit circonscrite à la sphère, et si l'on suppose que cette surface se meuve de manière que son sommet parcoure la droite, sans qu'elle cesse d'être circonscrite et tangente à la sphère; dans chacune de ses positions, elle touchera la sphère dans la circonférence d'un cercle; toutes ces circonférences passeront par deux mêmes points, qui seront les contacts de la sphère avec les deux plans tangens; et les plans de ces cercles se couperont tous suivant une même ligne droite, qui sera celle des deux contacts. Enfin, si l'on conçoit le plan mené par la droite donnée et par le centre de la sphère, ce plan, qui passera par les axes de toutes les surfaces coniques, sera perpendiculaire aux plans de tous les cercles de contact, et par conséquent à la droite qui est leur commune intersection; et il coupera tous ces plans dans des lignes droites qui passeront par un même point.

Réciproquement étant données une sphère et une ligne droite, si l'on conçoit par la droite tant de plans qu'on voudra, qui couperont la sphère chacun suivant un cercle, et si, pour chacun de ces cercles, on conçoit la surface conique droite dont il serait la base, et qui serait circonscrite à la sphère, les sommets de toutes ces surfaces coniques seront dans une autre même ligne droite.

39. En considérant seulement ce qui se passe dans le plan mené par la droite donnée et par le centre de la sphère, on est conduit aux deux propositions suivantes, qui sont des corollaires immédiats de ce qui précède.

« Étant donnés dans un plan (pl. 7, fig. 18 et 19) un cercle dont le centre soit en A, et une droite quelconque BC; si, après avoir mené par un point quelconque D de la droite deux tangentes au cercle, et la droite EF qui passe par les deux points de contact, on conçoit que le point D se meuve le long de la droite, et entraîne avec lui les deux tangentes, sans qu'elles cessent de toucher le cercle, les deux points de contact changeront de position, de même que la droite EF qui les joint; mais cette droite passera toujours par un même point F qui se trouve sur la perpendiculaire AG, abaissée du centre du cercle sur la droite. »

« Réciproquement, si, par un point N pris dans le plan d'un cercle, on mène tant de droites EF qu'on voudra, qui couperont chacune la circonférence du cercle en deux points, et si, par ces deux points, on mène au cercle deux tangentes ED, FD, qui se couperont quelque part en un point D, la suite de tous les points d'intersection trouvés de la même manière sera sur une même ligne droite BC perpendiculaire à AN. »

Ce n'est pas parce que tous les points de la circonférence sont également éloignés du centre, que le cercle jouit de la propriété que nous venons d'énoncer, c'est parce qu'il est une courbe du second degré; et toutes les sections coniques sont dans le même cas.

En effet, soient AEBF (fig. 20) une section conique quelconque, et CD une droite quelconque donnée dans son plan : concevons que la courbe tourne autour d'un de ses axes AB pour engendrer une surface de révolution, et concevons les deux plans tangens à cette surface menés par la droite CD; les deux plans auront chacun leur point de contact particu-

lier. Cela posé, si, en prenant pour sommet un point quelconque H de la droite CD, on conçoit la surface conique circonscrite et tangente à la surface de révolution, elle touchera cette dernière surface dans une courbe qni passera nécessairement par les deux points de contact avec les plans tangens. Cette courbe sera plane; son plan, qui sera perpendiculaire à celni de la section coniqne donnée, sera projeté sur ce dernier, suivant nne droite EF; et cette droite passera par les points de contact des tangentes à la section conique, menées par le point H. Actuellement, si l'on suppose que le sommet H de la surface conique se menve snr la droite CD, sans qne cette surface cesse d'être circonscrite et tangente à la surface de révolution; dans chacune de ses positions, sa conrbe de contact anra les mêmes propriétés de passer par les deux points de contact avec les plans tangens, d'être plane et d'avoir son plan perpendiculaire à la section conique. Donc les plans de toutes les courbes de contact passeront par la droite qui joint les denx points de contact, et qui est elle-même perpendiculaire au plan de la section coniqne; donc enfin les projections de tous les plans seront des lignes droites qui passeront toutes par la projection N de la droite qui joint les deux points de contact.

40. Enfin, cette proposition n'est elle-même qu'un cas particulier d'une autre plus générale qui a lieu dans les trois dimensions, et que nous nous contenterons d'énoncer ici.

« Étant données dans l'espace une surface courbe quelconque du second degré, et une surface conique circonscrite qui la touche, et dont le sommet soit en un point quelconque; si la surface conique se meut sans cesser d'être circonscrite à la première surface et de la toncher, de manière cependant que son sommet parcoure une droite quelconque, le plan de la courbe de contact des denx surfaces passera toujours par une même ligne droite (qui sera déter-

minée par les contacts de la surface du second degré avec les deux plans tangens qui passent par la droite des sommets); et si la surface conique se meut de manière que son sommet soit toujours dans un même plan, le plan de la courbe de contact passera toujours par un même point. »

41. *Seconde question.* Par un point donné, mener un plan tangent à la fois aux surfaces de deux sphères données.

Solution. Soient A, *a* (pl. 8, fig. 21), les deux projections du centre de la première sphère; B, *b*, celles du centre de la seconde; et C, *c*, celles du point donné. Après avoir mené les droites indéfinies AB, *ab*, projections de celle qui passerait par les deux centres, et après avoir construit les projections GEF, *gef*, HIK, *hik*, des grands cercles des deux sphères parallèles aux plans de projection, on concevra une surface conique circonscrite à la fois aux deux sphères, et qui les touche toutes deux. Cette surface aura son sommet dans la droite qui passe par les deux centres. On mènera aux deux cercles GEF, HIK, les deux tangentes communes EH, FK, qui se couperont en un point D de la droite AB; et ce point sera la projection horizontale du sommet du cône: on aura la projection verticale du même point, en projetant le point D en *d* sur le prolongement de *ab*. Enfin, on mènera les projections CD, *cd*, de la droite menée par le sommet du cône et par le point donné. Cela posé, si par cette dernière droite on conçoit deux plans tangens à la surface conique, ils la toucheront chacun en une de ses droites génératrices, et par conséquent, ils seront tous deux tangens en même temps aux deux sphères. La question est donc réduite à mener par la droite qui passe par le sommet du cône et par le point donné, deux plans tangens à la surface d'une des sphères, ce qui s'exécutera comme dans la question précédente, et les deux plans seront en même temps tangens à la seconde sphère.

Il faut observer que l'on peut concevoir deux surfaces

coniques circonscrites aux deux mêmes sphères. La première les enveloppe toutes deux en dehors, et a son sommet au-delà d'une des sphères par rapport à l'autre : les plans tangens à cette surface conique touchent chacun les deux sphères du même côté. La seconde surface conique enveloppe les sphères, l'une en dedans, l'autre en dehors, et a son sommet entre les deux centres. On trouve la projection horizontale D' de ce sommet en menant aux cercles EFG et HIK les deux tangentes intérieures qui se coupent en un point de la droite AB ; et l'on a sa projection verticale en projetant le point D' en *d'* sur *ab*. Les deux plans tangens menés à cette surface conique touchent aussi chacun les deux sphères ; mais ils touchent la première d'un côté, et la seconde de l'autre. Ainsi quatre plans différens peuvent satisfaire à la question ; pour deux d'entre eux, les deux sphères sont du même côté du plan ; pour les deux autres, elles sont de côtés différens.

42. *Troisième question.* Mener un plan tangent en même temps à trois sphères données de grandeur et de position.

Solution. Concevons le plan tangent en même temps aux trois sphères, et imaginons d'abord une surface conique circonscrite aux deux premières sphères, et qui les touche toutes deux ; le plan tangent touchera cette surface conique le long d'une de ses droites génératrices, et passera par le sommet du cône. Si l'on imagine une seconde surface conique circonscrite à la première sphère et à la troisième, le même plan tangent la touchera de même le long d'une de ses droites génératrices, et passera, par conséquent, par son sommet. Enfin, si l'on conçoit une troisième surface conique qui embrasse et touche la seconde sphère et la troisième, le plan tangent la touchera encore le long d'une de ses droites génératrices, et passera par son sommet. Ainsi les sommets des trois surfaces coniques seront dans le plan tangent ; mais ils seront aussi dans le plan qui

passe par les centres des sphères, et qni contient les trois axes : donc ils seront en même temps dans deux plans différens ; donc ils seront en ligne droite. Il suit de là que si l'on construit, comme nous l'avons indiqué dans la question précédente, les projections horizontales et verticales de ces sommets, dont deux suffisent, on pourra faire passer par ces projections celles d'une droite qui se trouve sur le plan tangent. La question se réduit donc à mener par une droite donnée un plan tangent à celle des trois sphères qu'on voudra ; ce qui s'exécutera par les méthodes précédentes, et ce plan sera tangent aux deux autres.

43. Il faut observer que, puisqu'on peut toujours concevoir pour deux sphères quelconques deux surfaces coniques qui les enveloppent et les touchent toutes deux, la première ayant son sommet au-delà d'un des centres par rapport à l'autre, la seconde ayant son sommet entre les deux centres, il est évident que, dans la question précédente, il y aura six surfaces coniques, dont trois seront circonscrites en dehors aux trois sphères prises deux à deux, et dont trois auront leurs sommets entre les sphères. Les sommets de ces six cônes seront distribués trois par trois sur quatre droites, par chacune desquelles on pourra mener deux plans tangens en même temps aux trois sphères. Ainsi huit plans différens satisfont à cette troisième question : deux d'entre eux touchent les trois sphères du même côté par rapport à eux ; les six autres sont tellement placés, qu'ils touchent deux des sphères d'un côté, et la troisième de l'autre.

44. Ces considérations nous conduisent à la proposition suivante :

« Trois cercles quelconques étant donnés de grandeur et de position sur un plan (fig. 22), si, en les considérant deux à deux, on leur mène les tangentes extérieures prolongées jusqu'à ce qu'elles se coupent, les trois points d'intersection D, E, F, qn'on obtiendra de cette manière, seront en ligne droite. »

Car si l'on conçoit les trois sphères dont ces cercles sont les grands cercles, et un plan qui les tonche toutes les trois extérieurement, ce plan touchera aussi les trois surfaces coniques circonscrites aux sphères considérées deux à denx, et passera par leurs trois sommets D, E, F. Mais ces trois sommets sont aussi sur le plan des trois centres : donc ils sont sur deux plans différens, et par conséquent en ligne droite. « Si aux mêmes cercles, considérés deux à deux, on mène les tangentes intérieures qni se croiseront, les trois nouveaux points d'intersection G, H, I, seront deux à denx en ligne droite avec un des trois premiers, en sorte que les six points D, E, F, G, H, I, seront les intersections des quatre droites. »

Enfin, cette proposition n'est qu'un cas particulier de la suivante, qui a lieu dans les trois dimensions.

« Quatre sphères quelconques étant données de grandeur et de position dans l'espace, si l'on conçoit les six surfaces coniques qui sont circonscrites extérieurement à ces sphères considérées deux à deux, les sommets des six cônes seront dans nn même plan et aux intersections de quatre droites ; et si l'on conçoit les six antres surfaces coniques circonscrites intérieurement, c'est-à-dirc qui ont leurs sommets entre les centres de deux sphères, les sommets de ces six nouveaux cônes seront trois par trois dans un même plan avec trois des premiers.

45. *Quatrième question*. Par un point pris arbitrairement, mener un plan tangent à une surface cylindrique donnée.

Solution. Soit EIFK (pl. 9, fig. 23) la trace de la snrface cylindrique sur le plan horizontal ; trace que nous supposons donnée. Soient AB, *ab*, les deux projections données de la droite à laquelle la génératrice doit toujours être parallèle ; et C, *c*, celles du point donné. Si par ce point on conçoit une parallèle à la droite génératrice, cette droite sera dans le plan tangent demandé ; et les points dans

lesquels elle coupera les plans de projection seront sur les traces du plan tangent. Donc, si par ce point C on mène CD parallèle à AB, et par le point *c*, *cd* parallèle à *ab*, on aura les deux projections de cette droite; et si, après avoir prolongé *cd* jusqu'à ce qu'elle rencontre LM en un point *d*, on projette le point *d* en D sur CD, le point D sera la rencontre de cette droite avec le plan horizontal, et par conséquent un point de la trace du plan tangent. Or, la trace horizontale du plan tangent doit être tangente à la courbe EIFK; donc si par le point D on mène à cette courbe toutes les tangentes possibles, DE, DF.... etc., on aura les traces horizontales de tous les plans tangens qui peuvent passer par le point donné. Si par les points de contact E, F.... etc., on mène à AB les parallèles indéfinies EG, FK, etc., on aura les projections horizontales des droites génératrices, dans lesquelles les différens plans tangens touchent la surface cylindrique; enfin on aura les projections verticales *eg*, *fh*... etc., de ces génératrices ou de ces droites de contact, en projetant les points E, F, etc., sur le plan vertical en *e*, *f*, etc., et en menant par ces derniers points des parallèles indéfinies à *ab*. Quant aux traces des plans tangens sur le plan vertical, on les trouvera par le procédé de la fig. 12.

46. *Cinquième question*. Par un point pris arbitrairement, mener un plan tangent à une surface conique donnée.

Comme la solution de cette question diffère très peu de celle de la précédente, nous nous contenterons d'en indiquer la construction dans la fig. 24, où la courbe EGFH est la trace donnée de la surface conique, où A et *a* sont les projections données du sommet, et où C et *c* sont celles du point donné par lequel le plan tangent doit passer.

47. *Sixième question*. Par une droite donnée, mener un plan tangent à une surface de révolution donnée.

Solution. Nous supposons que l'axe de la surface de révo-

lution soit perpendiculaire à l'un des deux plans de projection, ce qui n'altérera pas la généralité de la solution, parce qu'on est toujours le maître de disposer de la position de ces plans, de manière que cette condition soit remplie.

Soient donc A (pl. 10, fig. 25) la projection horizontale donnée de l'axe de la surface, *aa'* sa projection verticale, *apia'* la courbe génératrice de la surface, et BC, *bc*, les deux projections données de la droite par laquelle le plan tangent doit passer. Du point A soit abaissée sur BC la perpendiculaire AD, qui sera la projection horizontale de la plus courte distance entre l'axe et la droite donnée, et soit projeté le point D en *d* sur *bc*.

Cela posé, concevons d'abord que le plan tangent soit mené; puis supposons que la droite donnée tourne autour de l'axe de révolution, sans changer de distance à cet axe, sans changer d'inclinaison sur le plan horizontal, et qu'elle entraîne avec elle le plan tangent, de manière qu'il touche toujours la surface : il est évident qu'en vertu de ce mouvement, le point de contact de la surface et du plan changera de position : mais, parce que le plan tangent garde toujours la même inclinaison, ce point de contact ne changera pas de hauteur sur la surface, et il se mouvra dans la circonférence d'un cercle horizontal, dont le centre sera dans l'axe. De plus, la droite donnée engendrera par son mouvement une seconde surface de révolution autour du même axe, à laquelle le plan tangent sera lui-même tangent dans toutes ses positions.

En effet, concevons un plan par l'axe et par le point de contact du plan tangent avec la première surface : ce plan coupera la droite génératrice en un point qui sera celui du contact du même plan tangent avec la seconde; car indépendamment de la droite génératrice par laquelle il passe en ce point, il passe encore par la tangente du cercle horizontal au même point, puisqu'il passe par la tangente du

cercle horizontal au point de contact avec la première surface, et que, par la propriété des surfaces de révolution, ces deux tangentes sont parallèles.

Comme c'est au moyen de la seconde surface de révolution que nous devons résoudre la question, il est nécessaire de construire la courbe suivant laquelle elle est coupée par un plan mené par l'axe; et nous supposerons que ce plan soit parallèle au plan vertical de projection, et par conséquent projeté sur le plan horizontal dans une droite AF parallèle à LM.

Soit pris sur la droite donnée un point quelconque, dont les projections soient E et *e*, et cherchons le point dans lequel il rencontre le plan de la section dans son mouvement. D'abord ce point décrira autour de l'axe de révolution un arc de cercle horizontal, dont on aura la projection horizontale en décrivant du point A comme centre, et de l'intervalle AE, l'arc EF, jusqu'à ce qu'il rencontre la droite AF quelque part en un point F; et on aura la projection verticale de cet arc en menant par le point *e* l'horizontale indéfinie *ef*. Le point F sera donc la projection horizontale de la rencontre du point décrivant avec le plan de la section : donc, si l'on projette le point F en *f* sur *ef*, le point *f* sera la projection verticale de cette rencontre, et par conséquent un point de la section. Si l'on fait les mêmes opérations pour tant d'autres points qu'on voudra, pris sur la droite donnée, on aura autant de points *g*, *f*, *r*, *n*, par lesquels on fera passer la courbe demandée.

Cela fait, supposons que la droite donnée et le plan tangent, par leur rotation simultanée autour de l'axe, soient parvenus dans une position telle, que le plan tangent soit perpendiculaire au plan vertical de projection. Dans cette position, sa projection sur ce plan sera une ligne droite, et cette droite sera tangente en même temps aux deux courbes *apia'*, *grnf*. Si donc on mène à ces deux courbes toutes les tangentes

communes, telles que *gi*, *np*, on aura les projections de tous les plans tangens qui satisfont à la question, et considérés dans la position qu'ils ont prise, lorsque par la rotation ils sont devenus successivement perpendiculaires au plan vertical. Les points de contact, *i*, *p*, de ces tangentes, avec la génératrice de la première surface, détermineront les hauteurs de ceux de cette surface avec tous les plans tangens : par conséquent, si par ces points on mène les horizontales indéfinies *it*, *ps*, elles contiendront les projections verticales des points de contact de la surface avec les plans ; et si du point A comme centre, et avec des rayons égaux respectivement à *it* et à *ps*, on décrit des arcs de cercle IK, PQ, ces arcs contiendront les projections horizontales des mêmes points. Il ne reste donc plus, pour achever de les déterminer, qu'à trouver sur quels méridiens de la surface de révolution ils doivent se trouver : c'est ce à quoi doivent servir les points de contact *g*, *n*.

Pour cela, après avoir projeté les points *g*, *n*, sur AG, en G et N, si du point A comme centre, et avec des intervalles successivement égaux à AG et AN, on décrit les arcs de cercle GH, NO, jusqu'à ce qu'ils coupent la droite BC en des points H et O, ces arcs expriment la quantité de rotation que, pour chaque plan tangent, la droite qui passe par ces contacts avec les deux surfaces, a été obligée de faire pour se transporter dans le plan vertical parallèle à celui de projection. Donc on aura les projections horizontales de ces mêmes droites, considérées dans leurs positions naturelles, en menant par le point A les droites AH, AO; donc enfin les points K, Q; où les dernières droites couperont les arcs correspondans IK, PQ, seront les projections horizontales des points de contact de la première surface avec les plans tangens menés par la droite donnée.

Quant aux projections verticales des mêmes points, on les aura en projetant les points K, Q, en *k*, *q*, sur les horizontales respectives *it*, *ps*.

Les projections horizontales et verticales des points de contact étant déterminées, on construira les traces de tous les plans tangens par les mêmes méthodes que nous avons déjà employées.

Cette méthode peut facilement se généraliser et s'appliquer aux surfaces engendrées par des courbes quelconques, constantes de formes, et variables de positions dans l'espace.

III.

Des intersections des surfaces courbes.

48. Lorsque les générations de deux surfaces courbes sont entièrement déterminées et connues; lorsque, pour chacune d'elles, la suite de tous les points de l'espace par lesquels elle passe n'a plus rien d'arbitraire; lorsque, pour chacun de ces points, une des deux projections étant prise à volonté, l'antre projection peut toujours être construite; si ces dcux surfaces ont quelques points communs dans l'espace, la position de tous ces points communs est absolument déterminée; elle dépend et de la forme des deux surfaces courbes, et de leurs positions respectives; et elle est de natnre à pouvoir toujours être dédnite de la définition des générations des surfaces, dont elle est une conséquence nécessaire.

La suite de tous les points communs à denx surfaces courbes déterminées, forme en général dans l'espace une certaine ligne courbe qui, pour des cas très-particuliers, peut se trouver dans un certain plan, et n'avoir qu'une seule courbure, qui, pour des cas infiniment plus particuliers, peut devenir une ligne droite, et n'avoir aucune courbure; enfin qui, pour des cas infiniment plus particu-

liers encore, peut se réduire à un point unique; mais qui, dans le cas général, est ce qu'on nomme *courbe à double courbure*, parce qu'elle participe ordinairement des courbures de deux surfaces courbes, sur chacune desquelles elle se trouve en même temps, et dont elle est l'intersection commune.

49. Il existe entre les opérations de l'Analyse et les méthodes de la Géométrie descriptive une correspondance dont il est nécessaire de donner ici une idée.

Dans l'Algèbre, lorsqu'un problème est mis en équations, et qu'on a autant d'équations que d'inconnnes, on peut toujours obtenir le même nombre d'équations, dans chacune desquelles il n'entre qu'une des inconnues; ce qui met à portée de connaître les valeurs de chacune d'elles. L'opération par laquelle on parvient à ce but, et qui s'appelle *élimination*, consiste, au moyen d'une des équations, à chasser nne des inconnues de toutes les autres équations; et en chassant ainsi successivement les différentes inconnnes, on arrive à une équation finale qui n'en contient plus qu'une seule dont elle doit produire la valeur.

L'objet de l'élimination, dans l'Algèbre, a la plus grande analogie avec les opérations par lesquelles, dans la Géométrie descriptive, on détermine les intersections des surfaces conrbes.

En effet, supposons que, considérant nn point dans l'espace, et représentant par x, y, z, les distances de ce point à trois plans rectangulaires entre eux, on établisse une relation entre ces trois distances, et que cette relation soit exprimée par une équation, dans laquelle entrent les trois quantités x, y, z, et des constantes. En vertu de cette relation, la position du point ne sera pas déterminée : car les quantités x, y, z, pourront changer de valeur, et par conséquent le point pourra changer de position dans l'espace, sans que la relation exprimée par l'équation cesse d'avoir

lieu ; et la surface courbe, qui passe par toutes les positions que le point peut occuper ainsi, sans que la relation entre ces trois coordonnées soit altérée, est celle à laquelle appartient l'équation.

Par exemple, supposons qu'une sphère dont le rayon soit exprimé par A, ait son centre au point d'intersection commune des trois plans rectangulaires, et qu'en considérant un certain point sur la surface de la sphère, on imagine dcs perpendicnlaires abaissées de ce point sur les trois plans, et représentées par les lettres x, y, z; il est évident que le rayon de la sphère, dirigé au point que l'on considère, sera la diagonale d'nn parallélépipède rectangle, dont les trois arètes seront x, y, z; que son carré sera égal à la somme des carrés dcs trois arètes ; et qu'ainsi l'on aura l'équation $x^2+y^2+z^2=A^2$. Cela posé, si le point change de position snr la surface de la sphère, ses distances x, y, z, aux trois plans rectangnlaires, changeront; mais sa distance au centre ne changera pas, et la somme des carrés de ces trois coordonnées, qui est toujours égale au carré du rayon, aura toujours la même valeur : on aura donc encore, entre les cordonnées de ce point, la relation exprimée par l'équation $x^2+y^2+z^2=A^2$. Cette équation, qui a lieu pour tous les points de la snrface de la sphèrc, et qui a lieu pour eux seuls, est celle de cette surface. Toutes les surfaces courbes ont ainsi chacune lcur équation ; et s'il n'est pas toujours facile d'avoir cette équation exprimée en quantités aussi simples que les distances x, y, z, il est toujours possible de l'obtcnir en quantités plus compliquées, tellcs que les inclinaisons des plans tangens, les rayons des courbures : il suffit à notre objet d'en avoir fait connaître une pour exemple.

Actuellement, si, ayant en x, y, z, les équations de deux snrfaces courbes différentes, et en supposant que pour les points des deux surfaces, les distances soient prises par

rapport aux mêmes plans rectangulaires, on élimine une des trois quantités x, y, z, par exemple z, entre les deux équations ; par la simultanéité de ces deux équations, on établit d'abord que ce n'est pas de tous les points de la première surface indistinctement, ni de tous ceux de la seconde que l'on s'occupe, mais seulement de ceux de leur intersection, pour chacun desquels les équations doivent avoir lieu, puisqu'ils sont en même temps sur les deux surfaces. Ensuite l'équation en x, y, qui résulte de l'élimination de z, exprime la relation qui existe entre ces deux distances pour tous les points de l'intersection, quelle que soit la distance z, qui a disparu, et dont il n'est plus question dans l'équation; elle est donc l'équation de la projection de l'intersection des deux surfaces sur le plan perpendiculaire aux z.

On voit donc qu'en Algèbre l'objet de l'élimination entre plusieurs équations à trois inconnues, est de déterminer sur les trois plans auxquels tout l'espace est rapporté, les projections des intersections des surfaces auxquelles les équations appartiennent.

50. La correspondance entre les opérations de l'Analyse et les méthodes de la Géométrie descriptive ne se borne pas à ce que nous venons de rapporter; elle existe partout. Si dans l'espace, pour opérer des générations quelconques, on fait mouvoir des points, des lignes courbes, des surfaces, ces mouvemens peuvent toujours être dictés par des opérations analytiques; et les objets nouveaux auxquels ils donnent lieu sont exprimés par les résultats mêmes des opérations. Réciproquement, il n'y a aucune opération d'Analyse en trois dimensions, qui ne soit l'écriture d'un mouvement opéré dans l'espace et dicté par elle. Pour apprendre les mathématiques de la manière la plus avantageuse, il faut donc que l'élève s'accoutume de bonne heure à sentir la correspondance qu'ont entre elles les opérations

de l'Analyse et celles de la Géométrie ; il faut qu'il se mette en état, d'une part, de pouvoir écrire en analyse tous les mouvemens qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture.

51. Revenons actuellement à notre objet, qui est la méthode de déterminer les projections des intersections des surfaces courbes.

Pour mettre plus de clarté dans l'exposition de cette méthode, nous ne la présenterons pas d'abord avec toute l'élégance dont elle est susceptible; nous y arriverons par degrés. De plus, l'énoncé sera général et applicable à deux surfaces quelconques; et quoique les lettres que nous emploierons se rapportent à la figure 26, pl. 11, qui présente le cas particulier de deux surfaces coniques, à bases circulaires et à axes verticaux, il faut néanmoins toujours concevoir que les surfaces dont il s'agit peuvent être, chacune en particulier, tout autre qu'une surface conique.

52. *Premier problème général.* Les générations de deux surfaces courbes étant connues, et toutes les données qui fixent ces générations étant déterminées sur les plans de projection, construire les projections de la courbe à double courbure, suivant laquelle les deux surfaces se coupent.

Solution. On concevra une suite de plans indéfinis, placés d'une manière convenue dans l'espace ; ces plans pourront, par exemple, être tous horizontaux, et c'est en effet ce que nous supposerons d'abord. Dans ce cas, la projection verticale de chacun d'eux sera une droite horizontale indéfinie; et parce qu'on est maître de les mener à distances arbitraires, nous supposerons que dans la projection verticale on ait mené tant de droites horizontales (fig. 26) ee', ee', ee', etc., qu'on ait voulu, et que la suite de ces droites soit la projection verticale de la suite des plans qu'on a conçus.

Cela posé, on fera successivement, pour chacun de ces plans, et par rapport à la droite *ee'*, qui en est la projection, l'opération que nous allons indiquer pour celui d'entre eux qui est projeté en EE'.

Le plan EE' coupera la première surface en une certaine courbe, qu'il sera toujours possible de construire, si l'on connaît la génération de la surface ; car cette courbe est la suite des points dans lesquels le plan EE' est coupé par la génératrice dans toutes ses positions. Cette courbe étant plane et horizontale, aura sa projection horizontale égale, semblable à elle-même, et placée de la même manière ; il sera donc possible de construire cette projection, et nous supposerons que ce soit la courbe FGHIK.

Le même plan EE' coupera aussi la seconde surface dans une autre courbe plane horizontale, dont il sera toujours possible de construire la projection horizontale, et nous supposerons que cette projection soit la courbe FOGPN.

Cela fait, il peut arriver que les deux courbes dans lesquelles le même plan EE' coupe les deux surfaces, se coupent elles-mêmes, ou qu'elles ne se coupent pas : si elles ne se coupent pas, quelque prolongées qu'elles soient, ce sera une preuve qu'à la hauteur du plan EE' les deux surfaces n'ont aucun point commun ; mais si ces deux courbes se coupent, elles le feront en un certain nombre de points qui seront communs aux deux surfaces, et qui seront par conséquent autant de points de l'intersection demandée. En effet, en tant que les points d'intersection des deux courbes sont sur la première d'entre elles, ils sont sur la première des deux surfaces proposées ; en tant qu'ils sont sur la seconde courbe, ils sont aussi sur la seconde surface : donc, en tant qu'ils sont sur les deux courbes à la fois, ils sont aussi sur les deux surfaces.

Or, les projections horizontales des points dans lesquels se coupent les deux courbes doivent se trouver, et sur la

projection de la première, et sur la projection de la seconde; donc les points F, G..... de rencontre des deux courbes FGHIK et FOGPN, seront les projections horizontales d'autant de points de l'intersection demandée des deux surfaces courbes. Pour avoir les projections verticales des mêmes points, il faut observer qu'ils sont tous compris dans le plan horizontal EE', et que leurs projections doivent être sur la droite EE'. Donc, si l'on projette les points F, G..... sur EE' en *f*, *g*..... on aura les projections verticales des mêmes points.

Actuellement, si pour toutes les autres horizontales *ee'*, *ee'*...., on fait la même opération que nous venons de faire pour EE', on trouvera pour chacune d'elles, dans la projection horizontale, une suite de nouveaux points F, G..., et dans la projection verticale, une suite de nouveaux points *f*, *g*.... Puis, si par tous les points F.... on fait passer une branche de courbe, par tous les points G.... une autre branche, et ainsi de suite, l'assemblage de toutes ces branches, qui pourront quelquefois rentrer l'une dans l'autre, sera la projection horizontale de l'intersection des deux surfaces; de même, si par tous les points *f*.... on fait passer une branche de courbe, par tous les points *g*.... une autre branche, et ainsi de suite, l'assemblage de toutes ces branches, qui pourront aussi quelquefois rentrer les unes dans les autres, sera la projection verticale de l'intersection demandée.

53. La méthode que nous venons d'exposer est générale, même en supposant qu'on ait choisi pour système de plans coupans une suite de plans horizontaux. Nous allons voir que, dans certains cas, le choix du système de plans coupans n'est pas indifférent, qu'on peut quelquefois le faire tel, qu'il en résulte des constructions plus faciles et plus élégantes, et même qu'il peut être avantageux, au lieu d'un système de plans, d'employer une suite de surfaces

courbes, qui ne diffèrent entre elles que par une de leurs dimensions.

Pour construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont verticaux, le système de plans le plus avantageux est une suite de plans horizontaux; car chacun des plans coupe les deux surfaces en des circonférences de cercles dont les centres sont sur les axes respectifs, dont les rayons sont égaux aux ordonnées des courbes génératrices, prises à la hauteur du plan coupant, et dont les projections horizontales sont des cercles connus de grandeur et de position. Dans ce cas, tous les points de la projection horizontale de l'intersection des deux surfaces se trouvent donc par des intersections d'arcs de cercle. On sent que si les surfaces de révolution avaient leurs axes parallèles entre eux, mais non verticaux, il faudrait changer de plans de projection, et les choisir de manière que l'un d'entre eux fût perpendiculaire aux axes.

54. S'il s'agissait de construire l'intersection de deux surfaces coniques à bases quelconques, et dont les traces sur le plan horizontal fussent données ou construites, le système de plans horizontaux entraînerait dans des opérations qui seraient trop longues pour ce cas; car chacun des plans horizontaux couperait les deux surfaces dans des courbes, qui seraient bien à la vérité semblables aux traces des surfaces respectives : mais ces courbes ne seraient point égales aux traces; il faudrait les construire par points, chacune en particulier, tandis que, si, après avoir mené une droite par les sommets donnés des deux cônes, on emploie le système de plans qui passent par cette droite, chacun de ces plans coupera les deux surfaces coniques en quatre droites; et ces droites, qui seront dans le même plan, se couperont, indépendamment des sommets, en quatre points, qui seront sur l'intersection des deux surfaces. Dans ce cas, chacun des points de la projection ho-

rizontale de l'intersection sera donc construit par l'intersection de deux lignes droites.

55. Pour deux surfaces cylindriques à bases quelconques, et dont les génératrices seraient inclinées diversement, le système des plans horizontaux ne serait pas le plus favorable que l'on pourrait choisir. Chacun de ces plans couperait, à la vérité, les deux surfaces dans des courbes semblables et égales à leurs traces respectives; mais les courbes qui ne correspondraient pas verticalement aux traces auraient pour projections des courbes qui seraient distantes des traces elles-mêmes, et qu'il faudrait construire par points. Si l'on choisit le système de plans parallèles en même temps aux génératrices des deux surfaces, chacun de ces plans coupera les deux surfaces dans des lignes droites, et ces droites se couperont en des points qui appartiendront à l'intersection des deux surfaces. Par là, les points de la projection horizontale seront construits par des intersections de lignes droites. Au reste, ceci n'est que la conséquence nécessaire de ce que nous avons dit pour le cas de deux surfaces coniques.

56. Enfin, pour deux surfaces de révolution dont les axes seraient dans le même plan, mais non parallèles entre eux, ce ne serait plus un système de plans qu'il serait convenable de choisir, ce serait le système de surfaces sphériques qui auraient leur centre commun au point de rencontre des deux axes : car chacune des surfaces sphériques couperait les deux surfaces de révolution dans les circonférences de deux cercles qui auraient leurs centres sur les axes respectifs, et dont les plans seraient perpendiculaires au plan mené par les deux axes; et les points d'intersection de ces deux circonférences, qui seraient en même temps et sur la surface sphérique et sur les deux surfaces de révolution, appartiendraient à l'intersection demandée. Ainsi les points de la projection de l'intersection

seraient construits par les rencontres de cercles et de lignes droites. Dans ce cas, la position la plus avantageuse des deux plans de projection, est que l'un soit perpendiculaire à un des axes, et que l'autre soit parallèle aux deux axes. Ce petit nombre d'observations, par rapport aux surfaces courbes qui se rencontrent le plus fréquemment, suffit pour faire voir la manière dont la méthode générale doit être employée, et comment, par la connaissance de la génération des surfaces courbes, on peut choisir l'espèce de section qui doit donner des constructions plus faciles.

57. Lorsque les deux surfaces courbes sont définies de formes et de positions respectives, non-seulement la courbe de leur intersection est déterminée dans l'espace, mais encore toutes les affections de ces courbes s'ensuivent immédiatement. Ainsi, par exemple, dans chacun de leurs points, la direction de leur tangente est déterminée : il en est de même de celle de leur plan normal, c'est-à-dire du plan qui coupe la courbe à angle droit, et qui est par conséquent perpendiculaire à la tangente au point d'intersection. Quoique nous devions avoir souvent occasion, dans la suite, de considérer les plans normaux aux courbes à double courbure, nous n'entrerons ici, par rapport à leur détermination, dans aucun détail, parce que ces plans étant toujours perpendiculaires aux tangentes, il nous suffira d'avoir donné la manière de construire les projections des tangentes aux intersections des surfaces courbes.

58. *Second problème général.* Par un point pris à volonté sur l'intersection de deux surfaces courbes, mener la tangente à cette intersection.

Solution. Le point pris à volonté sur l'intersection des deux surfaces courbes se trouve en même temps et sur l'une et sur l'autre de ces surfaces. Si donc par ce point considéré sur la première surface on mène à cette surface un plan tangent, ce plan touchera l'intersection dans le

point que l'on considère. Pareillement, si par le même point considéré sur la seconde surface on mène à cette surface un plan tangent, ce plan touchera l'intersection dans le point que l'on considère. Les deux plans tangens toucheront donc l'intersection dans le même point, qui sera en même temps un de leurs points communs, et par conséquent un de ceux de la droite dans laquelle ils se coupent; donc l'intersection des deux plans tangens sera la tangente demandée.

Ce problème donne lieu à l'observation suivante, qui est d'un grand usage dans la Géométrie descriptive.

« La projection de la tangente d'une courbe à double courbure est elle-même tangente à la projection de la courbe, et son point de contact est la projection de celui de la courbe à double courbure. »

En effet, si, par tous les points de la courbe à double courbure, on conçoit des perpendiculaires abaissées sur un des plans de projection, par exemple, sur le plan horizontal, toutes ces perpendiculaires seront sur une surface cylindrique verticale, qui sera coupée par le plan horizontal dans la projection même. De même, si, par tous les points de la tangente à la courbe à double courbure, on conçoit des verticales abaissées, elles seront dans un plan vertical qui sera coupé par le plan horizontal dans la projection même de la tangente. Or, la surface cylindrique et le plan vertical se touchent évidemment dans toute l'étendue de la verticale abaissée du point de contact, et qui leur est commune; donc les intersections de la surface cylindrique et du plan par le plan horizontal se toucheront dans un point qui sera l'intersection de la droite du contact de la surface cylindrique et du plan vertical. Donc enfin les projections d'une courbe à double courbure et d'une de ses tangentes se touchent en un point qui est la projection du point de contact de la courbe.

59. Nous allons actnellement faire l'application de tout ce qui précède à quelques cas particuliers ; et ponr commencer par des considérations simples, nous supposerons d'abord qu'une des deux surfaces dont il faut déterminer l'intersection soit un plan.

Première question. Construire l'intersection d'nne surface cylindrique donnée, par un plan donné de position.

La position des plans de projection étant arbitraire, nous supposerons d'abord, ce qui est toujours possible, que ces denx plans aient été choisis de manière que l'un soit perpendiculaire à la génératrice de la snrface, et que l'autre soit perpendicnlaire au plan coupant, parce que, dans cette supposition, la construction est beaucoup plus facile; puis, pour donner aux élèves l'habitude des projections, nous supposerons que les deux plans de projection soient placés d'une manière quelconque.

Solution. *Premier cas, dans lequel on suppose que la génératrice de la surface soit perpendiculaire à l'un des plans de projection, par exemple, au plan horizontal, et que le plan coupant soit perpendiculaire à l'autre.*

Soit A (pl. 12, fig 27) la projection horizontale de la droite, à laquelle la génératrice de la surface cylindrique doit tonjours être parallèle; *aa''* sa projection verticale; BCDE la trace donnée de la surface cylindrique, trace qui sera la projection horizontale de la surface indéfinie, et, par conséquent, celle de la courbe d'intersection ; soit *fg* la projection verticale donnée du plan coupant, projection qui sera aussi celle de l'interseotion demandée, et FG la trace horizontale du mêmo plan : il est évident que si l'on mène à la courbe BCDE, et perpendiculairement à LM, les tangentes indéfinies E*e''*, C*c''*, les droites *ee''*, *cc''*, seront les projections verticales de la génératrice dans ses positions extrêmes, et que les points *e'*, *c'*, dans lesquels elles couperont la projection *fg* du plan coupant, termineront sur *fg* la projection verticale de l'intersection demandée.

Cela posé, si par un point pris arbitrairement sur l'intersection (point dont la projection horizontale sera un point H, pris à volonté sur la courbe BCDE, et dont on aura la projection verticale en projetant le point H en i' sur fg), on veut mener la tangente à cette intersection, il est clair que cette tangente sera comprise dans le plan coupant, et que sa projection verticale sera la droite fg; il est clair aussi qu'elle sera comprise dans le plan vertical tangent à la surface cylindrique, et que sa projection horizontale, qui sera la même que celle du plan tangent, sera la droite FHN tangente en H à la courbe donnée BCDE. Ainsi tout est déterminé par rapport à l'intersection demandée.

60. Actuellement posons qu'il s'agisse de construire cette intersection telle qu'elle existe dans son plan, et, par un de ses points pris à volonté, de lui mener une tangente. Si le plan de projection verticale se trouve à une trop grande distance de la courbe BCDE, on pourra concevoir un autre plan vertical qui lui soit parallèle, qui passe dans l'intérieur de la courbe BCDE, et dont la projection horizontale soit la droite EC parallèle à LM. Ce plan vertical coupera le plan coupant dans une droite parallèle à sa projection fg, et autour de laquelle, comme charnière, nous supposons que le plan coupant tourne pour devenir vertical, et présenter en face la courbe demandée. Cela posé, par tant de points H qu'on voudra, pris arbitrairement sur BCDE, on concevra des plans verticaux perpendiculaires au plan vertical de projection, et dont on aura en même temps les projections horizontales et verticales, en menant par tous les points H des droites HJKii' perpendiculaires à LM. Chacun de ses plans coupera le plan coupant dans une droite horizontale perpendiculaire à la charnière, et dont la projection verticale sera le point de rencontre i' des deux droites fg, ii'. De plus, dans chaque plan, cette droite

horizontale rencontrera la charnière dans un point dont la projection horizontale sera l'intersection J des deux droites EC, HJK*ii'*; et elle rencontrera la courbe demandée dans des points dont les projections horizontales seront les intersections H, K, de la droite HJK*ii'* avec la courbe BCDE. Enfin, cette droite et toutes ses parties seront égales à leurs projections horizontales. Or, lorsque le plan coupant tourne autour de la charnière pour devenir vertical, toutes ces droites, qui d'abord étaient horizontales, ne cessent pas d'être perpendiculaires à la charnière, et ne changent pas de grandeur. Donc, si par tous les points *i'* on mène à *fg* des perpendiculaires indéfinies *hk*, et si sur ces perpendiculaires on porte JH de *i'* en *h*, et JK de *i'* en *k*, on aura tant de points *h*, *k*, qu'on voudra, par lesquels on fera passer la courbe demandée *e'kc'h*.

61. La courbe étant construite dans son plan, il s'agit par un de ses points *h*, pris arbitrairement, de lui mener une tangente : on aura la projection verticale de ce point en abaissant du point *h* sur *fg* la perpendiculaire *hi'*; on aura sa projection horizontale en projetant *i'* en H sur la courbe BCDE; on aura la projection horizontale de la tangente demandée, en menant la droite FN, tangente en H, à la courbe BCDE; et il suffira de rapporter sur le plan de la courbe un point quelconque de la tangente, celui, par exemple, qui est projeté sur le point N pris arbitrairement, et dont la projection verticale est sur *fg* en *a'*. Or, en raisonnant pour ce point comme pour tout autre point du plan coupant, il est clair que si par le point *a'* on mène à *fg* la perpendiculaire *a'n*, et que si sur cette droite on porte de *a'* en *n* la distance NA du point N à la droite EC, le point *n* sera le second point de la tangente. Donc en menant la droite *hn*, on aura la tangente demandée.

62. Quelle que soit la courbe donnée BCDE, on voit que l'intersection *e'kc'h* jouit de la propriété, que, pour un de

ses points quelconque, la sous-tangente $a'n$ est égale à la sous-tangente AN de la première. Cette propriété, qui est très connue pour le cercle et l'ellipse, lorsque ces deux courbes ont un axe commun, n'a lieu par rapport à elles que parce qu'elles sont les intersections d'une même surface cylindrique par deux plans différens.

63. Enfin il peut arriver qu'on ait besoin de tracer sur le développement de la surface cylindrique l'effet de la section faite par le plan coupant. Pour cela, après avoir développé la courbe BCDE, avec toutes ses divisions, sur une droite RQ, si par toutes les divisions de RQ on lui mène des perpendiculaires indéfinies, on aura sur le développement de la surface les traces des différentes positions de la droite génératrice, et il ne s'agira plus que de porter sur ces perpendiculaires les parties des génératrices correspondantes, comprises entre la section perpendiculaire BCDE, et la section faite par le plan coupant. Or, ces parties de génératrices sont égales à leurs projections verticales, et ces projections sont toutes terminées d'une part à la droite LM, et de l'autre à *fg*. Donc, si le point H, par exemple, tombe en S sur la droite RQ, en portant ii' sur la perpendiculaire qui passe par le point S, de S en T, le point T sera, sur la surface développée, celui où la génératrice qui passe par le point H est coupée par le plan coupant. La courbe XTYZ, qui passera par tous les points déterminés de la même manière, sera la courbe demandée.

64. Il est évident que si l'on prolonge la tangente au point H jusqu'à ce qu'elle rencontre la trace horizontale GF du plan coupant quelque part en un point F, et que si l'on porte HF sur RQ de S en U, la droite TU sera tangente à la courbe; car lorsque la surface cylindrique se développe, ses élémens ne changent pas d'inclinaison par rapport au plan horizontal.

Second cas, dans lequel on suppose la surface cylindrique

et le plan coupant placés d'une manière quelconque par rapport aux deux plans de projections.

65. *Solution.* (Pl. 13, fig. 28.) Soient AA′ et *aa′* les deux projections de la droite à laquelle la génératrice doit être parallèle ; CEDF, la trace donnée de la surface cylindrique ; et HG*h*, *hb*, les traces du plan coupant.

On imaginera une suite de plans parallèles à la génératrice de la surface cylindrique, et qui seront de plus tous perpendiculaires à un des plans de projection, par exemple, au plan horizontal ; chacun de ces plans sera projeté suivant une droite OKE parallèle à AA′, et coupera la surface en des droites qui seront des positions de la génératrice, et qui rencontreront le plan horizontal aux points d'intersection E, F, de la droite OKE avec la courbe CEDF. Si donc on projette les points E, F, sur LM en *e*, *f*, et si par ces derniers points on mène à la droite *aa′*, les parallèles *ee′*, *ff′*, on aura les projections verticales des intersections de la surface avec chacun des plans parallèles à la génératrice.

Ces mêmes plans couperont aussi le plan coupant en des droites qui seront parallèles entre elles, qui auront toutes leurs traces horizontales sur les différens points O de la droite HG, et dont les projections verticales seront aussi parallèles entre elles. Pour avoir ces projections, il faut d'abord chercher la direction de l'une d'elles, de celle, par exemple, qui correspond au plan vertical mené par AA′. Pour cela, si l'on prolonge AA′ jusqu'à ce qu'elle rencontre, d'une part, la trace du plan coupant en un point N, et de l'autre, la droite LM en un point B, et si l'on projette le point B en *b* sur *hb*, les deux points N et *b* seront sur les deux plans de projection les traces de l'intersection du plan coupant avec le plan vertical. Donc, si l'on projette le point N en *n* sur LM, et si l'on mène la droite *nb*, on aura la projection verticale de cette intersection. Donc, en projetant sur LM tous les points O, dans lesquels la trace GH

est conpée par les projections des plans verticaux, ce qui donnera une suite de points *o*, et en menant par ces derniers les parallèles *oik* à *nb*, on aura les projections verticales des intersections du plan coupant par la suite des plans verticaux. Donc enfin les points de rencontre *i*, *k*, de chaque droite *oik* avec les projections *ee'*, *ff'*, des sections faites dans la surface cylindrique par le plan vertical correspondant, seront sur la projection verticale de l'intersection demandée; et la courbe qui passera par tous les points *i*, *k*, ainsi déterminés, sera cette projection. Si l'on projette les points *i*, *k*, en J, K; sur la projection OKE du plan vertical correspondant, on aura la projection horizontale des mêmes points, et la courbe KJP, qui passera par tous les points ainsi déterminés, sera la projection horizontale de l'intersection.

66. Pour avoir les tangentes de ces deux projections aux points J, *i*, il faut se rappeler que ces tangentes sont les projections de la tangente à l'intersection. Or, cette dernière tangente étant en même temps dans le plan coupant et dans le plan tangent à la surface cylindrique, doit avoir sa trace horizontale dans l'intersection des traces horizontales do ces deux plans : de plus, la trace du plan tangent est la tangente en F à la courbe CEDF. Donc, si l'on mène cette tangente, et si, après l'avoir prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la trace du plan coupant en un point G, on mène la droite GJ, cette droite touchera, au point J, la projection horizontale de l'intersection. Enfin, projetant le point G sur LM en *g*, et menant la droite *gi*, on aura la tangente en *i* de la projection verticale de la même courbe.

67. S'il faut construire la conrbe de l'intersection, telle qu'elle existe dans son plan, on concevra que le plan coupant tourne autour de sa trace horizontale HG, comme charnière, pour s'appliquer sur le plan horizontal. Dans ce mouvement, chacun des points do la section, celui,

par exemple, qui est projeté en J, décrira un arc de cercle dont le plan sera vertical, perpendiculaire à HG, et dont on aura la projection indéfinie en menant par le point J une droite RJS perpendiculaire à HG : donc, lorsque le plan sera abattu, le point de la section tombera quelque part sur un point de cette droite. Reste à trouver la distance de ce point à la charnière : or, la projection horizontale de cette distance est JR; et la différence des hauteurs de ses extrémités est la verticale *is*. Si l'on porte JR sur LM de *s* en *r*, l'hypoténuse *ri* sera cette distance. Donc, portant *ri* sur RJ de R en S, le point S sera un des points de l'intersection considérée dans son plan abattu sur le plan horizontal; et la courbe STUV, menée par tous les points S semblablement construits, sera cette intersection elle-même.

68. Pour avoir la tangente de cette courbe au point S, il suffit d'observer que, pendant le mouvement du plan coupant, la tangente ne cesse pas de passer par le point G de la charnière : donc, si l'on mène la droite SG, on aura la tangente demandée.

69. *Deuxième question.* Construire l'intersection d'une surface conique à base quelconque donnée, par un plan donné de position.

Solution. Nous supposerons, ce qui est toujours possible, que le plan vertical de projection soit placé perpendiculairement au plan coupant.

Soient A et *a'* (pl. 14, fig. 29) les projections du sommet du cône ou du centre de la surface conique, BCDE la trace de cette surface sur le plan horizontal, *fg* la projection verticale du plan coupant, et G*f* sa trace horizontale. On imaginera par le sommet du cône une suite de plans perpendiculaires au plan vertical de projection : les projections verticales de ces plans seront les droites *a'c* menées par la projection du sommet; et leurs traces horizontales seront

les droites *c*C perpendiculaires à LM, qui couperont la trace de la surface conique quelque part en des points C, C'.... Ces plans couperont la surface en des droites dont les projections verticales seront les droites *a'c*...., et dont on aura les projections horizontales en menant au point A les droites CA, C'A... Les mêmes plans couperont aussi le plan coupant dans des droites qui seront perpendiculaires au plan vertical. Les projections de ces droites seront les points *h*... de rencontre de *fg* avec les droites *a'c*...., et on aura leurs projections horizontales en abaissant des points *h*... sur LM les perpendiculaires indéfinies *h*H... Cela fait, les droites *h*H.... couperont les droites correspondantes CA, C'A...., en des points H, H'.... qui seront les projections horizontales d'autant de points de l'intersection demandée; et la courbe PHQH', qui passera par tous les points construits de cette manière, sera la projection de l'intersection.

70. Pour mener à cette courbe une tangente par un point H pris à volonté sur elle, il suffit de chercher sur le plan horizontal la trace de la tangente de l'intersection dans le point qui correspond au point H. Or, cette trace doit être sur celle du plan coupant, et par conséquent sur G*f*; elle doit être aussi sur celle du plan qui touche la surface conique dans la droite dont la projection est AH : de plus, si l'on prolonge AH jusqu'à ce qu'elle rencontre la courbe BCDE quelque part en un point C, la tangente CF de cette courbe au point C sera la trace horizontale du plan tangent. Donc le point F de rencontre des deux traces *f*G, CF, sera sur la tangente au point H de la courbe PHQH'.

71. S'il est nécessaire de construire l'intersection considérée dans son plan, on pourra indifféremment concevoir, ou que le plan coupant tourne autour de G*f* comme charnière, pour s'abattre sur le plan horizontal, et construire la courbe dans la position qu'elle aura prise alors, ou qu'il tourne autour de sa projection verticale *fg* pour s'appliquer

sur le plan vertical; c'est cette dernière hypothèse que nous allons suivre.

Toutes les horizontales dans lesquelles la suite des plans menés par le sommet a coupé le plan coupant, et qui sont perpendiculaires à *fg*, ne changent pas de grandeur dans le mouvement du plan coupant, et ne cessent pas d'être perpendiculaires à *fg* : donc, si par tous les points *h* on mène à *fg* des perpendiculaires indéfinies, et si l'on porte sur elles les horizontales correspondantes KH, KH', de *h* en N et en N', les points N et N' seront des points de la section; et la courbe RNSN', menée par tous les points ainsi construits, sera l'intersection considérée dans son plan.

72. D'après tout ce qui précède, il est évident que, pour mener à cette courbe une tangente en un point N, pris arbitrairement sur elle, il faut du point N abaisser sur *fg* la perpendiculaire N*h*, mener la droite *a'h* jusqu'à ce qu'elle rencontre LM en un point *c*, projeter ce dernier point en C sur la courbe BCDE, mener à cette courbe la tangente en C, qui coupera la trace G*f* quelque part en un point F, et porter F*f* perpendiculairement à *fg* de *f* en O. La droite ON sera la tangente demandée.

Quant à la manière de construire le développement de la surface conique à base quelconque, et de tracer sur ce développement l'effet de l'intersection par le plan coupant, nous l'exposerons incessamment, après avoir parlé de l'intersection de la surface conique par celle d'une sphère qui aurait son centre au sommet.

73. *Troisième question.* Construire l'intersection de deux surfaces coniques à bases circulaires, et dont les axes sont parallèles entre eux.

Solution. Nous ne répéterons pas ici sur la fig. 26, pl. 11, tout ce que nous avons dit en exposant la méthode générale à laquelle cette figure servait de type; nous observerons seulement que, dans le cas dont il s'agit ici, de même que

dans celui de deux surfaces quelconques de révolution, les sections faites dans les deux surfaces par les plans horizontaux sont des cercles : mais nous entrerons dans quelques détails par rapport aux tangentes, dont nous n'avons pas eu occasion de parler.

74. Pour trouver la tangente au point D (pl. 11, fig. 26) de la projection horizontale de l'intersection, nous nous rappellerons qu'elle est la projection de la tangente de l'intersection des deux surfaces, au point qui correspond à D, et qu'il suffit, pour la déterminer, de trouver le point S qui est, sur le plan horizontal, la trace de la tangente de l'intersection. Or, cette dernière tangente est dans les deux plans qui touchent les surfaces coniques dans le point de l'intersection ; donc, si l'on trouve les traces horizontales R*r*, Q*q*, de ces deux plans tangens, elles détermineront par leur rencontre le point S. Mais le plan tangent à la première surface la touche dans une droite qui passe par le sommet, et dont on aura la projection horizontale en menant la droite indéfinie AD. De plus, si l'on prolonge AD jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point Q la trace circulaire horizontale TQUV de la surface, le point Q sera un point de la ligne de contact de la surface et du plan ; par conséquent la trace horizontale du plan sera tangente en Q au cercle TQUV : soit donc menée cette tangente Q*q*. Pareillement, si l'on prolonge le rayon BD jusqu'à ce qu'il rencontre en R la trace horizontale circulaire RXYZ de la seconde surface, et si l'on mène à ce cercle la tangente en R, cette droite R*r* sera la trace horizontale du plan tangent à la seconde surface. Donc, si par le point S d'intersection des deux tangentes Q*q*, R*r*, on mène la droite SD, on aura la tangente au point D de la projection horizontale de l'intersection.

Quant à la tangente au point correspondant *d* de la projection verticale, il est clair qu'on l'obtiendra en projetant le point S en *s*, et en menant ensuite la droite *sd*, qui sera cette tangente.

75. Il peut arriver qu'il soit nécessaire de construire sur le développement de l'une des surfaces coniques, peut-être même sur celui de chacune d'elles, l'effet de leur mutuelle intersection; ce qui serait nécessaire, par exemple, s'il fallait exécuter les cônes avec des substances flexibles, telles que des feuilles de métal : dans ce cas, on opérera pour chaque cône, comme nous allons l'indiquer pour le premier.

Nous observerons d'abord que, lorsqu'une surface conique se développe pour devenir plane, les lignes droites qui sont sur cette surface ne changent ni de forme ni de grandeur, parce que chacune d'elles est successivement la charnière autour de laquelle s'opère le développement : ainsi tous les points de la surface restent toujours à la même distance du sommet. De plus, lorsque, comme dans ce cas, la surface conique est droite et circulaire, tous les points de la trace horizontale circulaire sont à égales distances du sommet; ils doivent donc être à égale distance du sommet sur le développement et par conséquent sur un arc de cercle dont le rayon est égal à la distance constante du sommet à la trace circulaire. Donc, si après avoir pris arbitrairement un point pour représenter le sommet sur le développement, on décrit de ce point, comme centre, et d'un rayon égal à aC, un arc de cercle indéfini, cet arc sera aussi indéfiniment le développement de la trace horizontale de la surface. Puis, si, à partir du point T de la trace par lequel on veut commencer le développement, on porte l'arc de cercle TQ sur l'arc qu'on vient de décrire, on déterminera la position du point Q sur le développement; et la droite indéfinie, menée par ce point au centre du développement, sera la position qu'occupera la droite de la surface qui est projetée en AQ, et sur laquelle devra se trouver le point D, d de la section rapportée. Pour construire ce point, il ne s'agira plus que de trouver sa distance au sommet, et de la porter sur la droite indéfinie, à partir

du centre du développement. Pour cela, par le point *d* dans la projection verticale, on mènera l'horizontale *dk* jusqu'à ce qu'elle coupe le côté *a*C du cône en un point *k*; et la droite *ak* sera cette distance. En construisant de même successivement tous les autres points de l'intersection, et faisant passer par tous ces points une courbe, on aura l'intersection des deux surfaces rapportées sur le développement de la première : on opérera de même pour la seconde surface.

76. *Quatrième question.* Construire l'intersection de deux surfaces coniques à bases quelconques.

Solution. Soient A, *a* (pl. 15, fig. 30), les projections du sommet de la première surface; CGDG′ sa trace donnée sur le plan horizontal; B, *b*, les projections du sommet de la seconde, et EHFH′ sa trace sur le plan horizontal. On concevra par les deux sommets une droite, dont on aura les projections en menant les droites indéfinies AB, *ab*, et dont on construira facilement la trace I sur le plan horizontal. Par cette droite on concevra une série de plans qui couperont chacun les deux surfaces coniques dans le système de plusieurs lignes droites; et celles de ces lignes droites qui seront dans le même plan détermineront par leurs rencontres autant de points de l'intersection des deux surfaces. Les traces horizontales de tous les plans de cette série passeront nécessairement par le point I; et, parce que la position de ces plans est d'ailleurs arbitraire, on pourra donc se donner arbitrairement leurs traces en menant par le point I tant de droites IK qu'on voudra, pour chacune desquelles on fera l'opération que nous allons décrire pour une seule d'entre elles.

La trace KI de chacun des plans de la série coupera la trace horizontale de la première surface conique en des points G, G′, qui seront aussi les traces horizontales des lignes droites suivant lesquelles le plan coupe la surface

conique : ainsi AG, AG′, seront les projections horizontales indéfinies de ces droites, et l'on aura leurs projections verticales en projetant G, G′, en *g*, *g′*, et menant les droites indéfinies *ag*, *ag′*. Pareillement la trace KI du même plan de la série coupera la trace horizontale de la seconde surface conique dans des points H, H′, par lesquels si l'on mène indéfiniment BH, BH′, on aura les projections horizontales des droites suivant lesquelles le même plan de la série coupe la seconde surface, et l'on aura leurs projections verticales en projetant H, H′, en *h*, *h′*, et en menant les droites indéfinies *bh*, *bh′*.

Cela fait, pour le même plan dont la trace est KI, on aura sur la projection horizontale un certain nombre de droites AG, AG′, BH, BH′; et les points P, Q, R, S, où celles qui appartiennent à l'une des surfaces rencontreront celles qui appartiennent à l'autre, seront les projections horizontales d'autant de points de l'intersection des deux surfaces. Ainsi en opérant successivement de la même manière pour d'autres lignes KI, on trouvera de nouvelles suites de points PQRS ; et faisant ensuite passer par tous les points P une première branche de courbe, par tous les points Q une seconde, par tous les points R une troisième, etc., on aura la projection horizontale de l'intersection demandée.

Pareillement, pour le même plan dont la trace est KI, on aura sur la projection verticale un certain nombre de droites *ag*, *ag′*, *bh*, *bh′*, dont les points de rencontre seront les projections verticales d'autant de points de l'intersection.

Il faut observer ici qu'il n'est pas nécessaire de construire les deux projections de la courbe d'intersection indépendamment l'une de l'autre, et qu'un point de l'une étant construit, on peut trouver son correspondant sur l'autre projection, en le projetant par une perpendiculaire à la

commune intersection des denx plans de projection, sur l'une des droites qui doit le contenir ; ce qui fournit les moyens de vérifier les opérations et d'éviter, dans certains cas, les intersections de droites qui se conperaient sous les angles trop obliques.

77. Pour trouver les tangentes à la projection horizontale, celle, par exemple, qui la touche au point P, il faut construire la trace horizontale T de la tangente de l'intersection au point qui correspond à P. Or, cette tangente est l'intersection des deux plans qui touchent les surfaces coniques dans ce point : sa trace sera donc la rencontre des traces horizontales de ces deux plans tangens. De plus, AG'P est la projection de la droite de contact du plan qui touche la première surface ; ainsi la trace de ce premier plan sera la tangente de la courbe CGDG' au point G' : soit G'TV cette tangente. Pareillement BH'P est la projection horizontale de la droite de contact du plan qui touche la seconde surface ; ainsi la trace horizontale du second plan tangent sera la tangente au point H' de la courbe EHFH' : soit H'TU cette tangente. Les deux tangentes G'V, H'U, se couperont donc en un point T, par lequel si l'on mène la droite TP, on aura la tangente au point P demandée.

En raisonnant de même pour les autres points Q, R, S, on trouvera, 1° que la tangente en Q doit passer par le point de rencontre des tangentes en G' et en H ; 2° que la tangente en R doit passer par la rencontre des tangentes en H et en G ; 3° que la tangente en S doit passer par la rencontre des tangentes en G et en H'.

Qnant aux tangentes de la projection verticale, elles n'ont aucune difficulté, lorsque celles de la projection horizontale sont déterminées ; car en projetant les traces horizontales des tangentes de l'intersection, on a les points par lesquels elles doivent passer.

78. *Cinquième question.* Construire l'intersection d'une

surface conique à base quelconque, et celle d'une sphère.

Nous supposerons ici que les deux surfaces sont concentriques, c'est-à-dire que le sommet du cône est placé au centre de la sphère, parce que nous aurons besoin de ce cas particulier pour la question suivante.

Solution. Soient A, *a* (pl. 16, fig. 31), les projections du centre commun des deux surfaces, BCDE la trace horizontale donnée de la surface conique, *am* le rayon de la sphère, et le cercle *lf'g'm* la projection verticale de la sphère. On concevra par le centre commun des deux surfaces une série de plans, que l'on pourra de plus supposer tous perpendiculaires à l'un des deux plans de projection. Dans la figure 31, nous les avons supposés verticaux. Chacun de ces plans coupera la surface conique dans un système de lignes droites, et la surface de la sphère dans la circonférence d'un de ses grands cercles; et pour chaque plan les rencontres de ces droites avec la circonférence du cercle détermineront des points de l'intersection demandée : soient donc menées par le point A tant de droites indéfinies CAE qu'on voudra, qui seront les projections horizontales d'autant de plans verticaux de la série, et en même temps celles des lignes suivant lesquelles ces plans coupent les deux surfaces. Chaque droite CAE coupera la trace horizontale BCDE de la surface conique en des points C, E, qui seront les traces horizontales des sections faites dans cette surface par le plan correspondant; et si, après avoir projeté les points C, E, sur LM en *c*, *e*, on mène les droites *ac*, *ae*, on aura les projections verticales des mêmes sections. Il s'agit actuellement de trouver les rencontres de ces sections avec celles de la sphère par le même plan.

Pour cela, après avoir mené par le point A la droite GAF parallèle à LM, on concevra que le plan vertical mené par CE tourne autour de la verticale qui est élevée par le point A, et projetée en *a'a*, jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au

plan vertical de projection, et de plus qu'il entraîne avec lui les sections qu'il a faites dans les deux surfaces. Dans ce mouvement, les points C, E, décriront autour du point A, comme centre, des arcs de cercle CG, EF, et viendront s'appliquer en G, F; et si l'on projette ces derniers points sur LM en *g*, *f*, les droites *ag*, *af*, seront les projections verticales des sections faites dans la surface conique, considérées dans la nouvelle position qu'elles ont prise en vertu du mouvement du plan. La section faite dans la surface de la sphère, considérée de même dans la nouvelle position, aura pour projection verticale la circonférence *lf'g'm*. Donc les points de rencontre *f'*, *g'*, de cette circonférence avec les droites *ag*, *af*, seront les projections des points de l'intersection demandée, considérés aussi dans la nouvelle position du plan.

Actuellement pour avoir les projections des mêmes points considérés dans leur position naturelle, il faut supposer que le plan vertical de la série retourne dans sa position primitive. Dans ce mouvement, tous les points du plan, et par conséquent ceux de l'intersection qu'il contient, décriront des arcs de cercle horizontaux autour de la verticale élevée par le point A comme axe, et dont les projections verticales seront des droites horizontales. Donc, si par les points *g'*, *f'*, on mène les horizontales *g'i*, *f'h*, elles contiendront les projections verticales des points de l'intersection : mais ces projections doivent aussi se trouver sur les droites respectives *ac*, *ae*; donc elles seront aux points de rencontre *i*, *h*, de ces dernières droites horizontales *g'i*, *f'h*. Ainsi la courbe *khni*, menée par tous les points construits de la même manière pour toute autre droite que CE, sera la projection verticale de l'intersection demandée.

Si l'on projette les points *i*, *h*, sur CE en J, H, on aura les projections horizontales des mêmes points de l'intersection; et la courbe KHNJ menée par tous les points J, H,

construits de la même manière pour toute autre droite que CE, sera la projection horizontale de l'intersection.

79. Pour trouver la tangente au point J de la projection horizontale, il faut construire la trace horizontale P de la tangente au point correspondant de l'intersection. Cette droite doit se trouver à la rencontre des traces des plans tangens aux deux surfaces au point de l'intersection qui correspond au point J. Or, il est évident que, si par le point C on mène à la courbe BCDE la tangente CP, on aura la trace du plan tangent à la surface conique. Quant à celle du plan tangent de la sphère, on opérera comme nous l'avons vu pour les surfaces de révolution, c'est-à-dire en menant par le point g' au cercle $lf'g'm$ la tangente $g'o$ prolongée jusqu'à la droite LM en o, en portant ensuite $a'o$ sur CE de A en O, et menant par le point O la droite OP perpendiculaire à CE. Donc les deux traces CP, OP, se couperont en un point P, par lequel si l'on mène la droite JP, on aura la tangente au point J.

Enfin il est évident que l'on aura la tangente au point i de la projection verticale de l'interjection, en projetant le point P sur LM en p, et menant ensuite la droite ip, qui sera la tangente demandée.

80. Si la sphère et la surface conique n'étaient pas concentriques, il faudrait concevoir par leurs deux centres une ligne droite, et choisir la série des plans coupans qui passerait par cette droite. Chacun de ces plans couperait la surface conique dans des droites, et celle de la sphère dans un de ses grands cercles, comme dans le cas précédent; ce qui donne également une construction simple: mais alors il serait avantageux de placer le plan vertical de projection parallèlement à la droite menée par les deux centres, afin que, dans le mouvement que l'on fait faire à chaque plan coupant pour le rendre parallèle au plan vertical de projection, les deux centres soient immobiles

et ne changent pas de projections ; ce qui simplifie les constructions.

81. *Sixième question*. Construire le développement d'une surface conique à base quelconque, et rapporter sur cette surface ainsi développée une section dont on a les deux projections.

Solution. On concevra la surface d'une sphère d'un rayon pris à volonté, et dont le centre soit placé au sommet du cône, et l'on construira, comme nous l'avons fait dans la question précédente, les projections de l'intersection de ces deux surfaces. Cela fait, il est évident que tous les points de l'intersection sphérique étant à la même distance du sommet, ils doivent aussi sur la surface développée se trouver à la même distance du sommet, et par conséquent sur un arc de cercle décrit du sommet comme centre, et avec un rayon égal à celui de la sphère. Ainsi, en supposant que le point R (pl. 16, fig. 33) soit le sommet de la surface développée, si de ce point comme centre, et d'un rayon égal à *am* (fig. 31), on décrit un arc de cercle indéfini STU, ce sera sur cet arc que tous les points de l'intersection sphérique viendront s'appliquer, de manière que les parties de cet arc seront respectivement égales aux parties correspondantes de l'intersection sphérique. Il s'agit donc actuellement, après avoir pris à volonté sur cette intersection un point pour origine, par exemple, celui qui est projeté en N, *n* (fig. 31), et un point S (fig. 33) pour son correspondant sur la surface développée, de développer les différens arcs de l'intersection sphérique, et de les porter successivement sur l'arc de cercle STU de S en des points T. Pour cela, la courbe sphérique étant à double courbure, il faut lui faire perdre successivement ses deux courbures, sans altérer sa grandeur, de la manière suivante :

L'intersection sphérique étant projetée sur le plan horizontal en NJKH (fig. 31), on peut la regarder comme tra-

cée sur la surface d'un cylindre vertical, dont la base serait NJKH : on pourra donc développer cette surface, comme nous l'avons indiqué (pl. 12, fig. 27), et rapporter sur cette surface cylindrique développée l'intersection sphérique, en développant l'arc NJ (pl. 16, fig. 31) en N'J' (fig. 32), et en portant la verticale $i'i$ (fig. 31) perpendiculairement à N'N' (fig. 32) de J' en J". La courbe N"J"K"H"N", qui passera par tous les points J" ainsi déterminés, sera l'intersection sphérique privée de sa courbure horizontale, sans avoir changé de longueur. On aura la tangente au point J" de cette courbe, en prenant JP (fig. 31), et la portant sur N'N' (fig. 32) de J' en P', et menant la droite J"P'.

Actuellement, on développera la courbe N"J"K"H"N" pour la replier sur l'arc STU (fig. 33) : par exemple, on portera l'arc N"J" de S en T, et le point T sera, sur la surface conique développée, le point où s'applique celui de l'intersection sphérique, dont les projections sont J, i (fig. 31). Donc, si l'on mène la droite RT, on aura, sur le développement de la surface, la génératrice dont la projection horizontale est AC (fig. 31) : enfin, s'il se trouve sur cette génératrice un point qu'il faille rapporter sur la surface développée, il ne s'agira plus que de prendre (fig. 31) la distance de ce point au sommet de la surface conique, et de la porter (fig. 33) sur RT de R en V ; et le point V sera sur la surface développée celui que l'on considère.

82. *Septième question.* Construire l'intersection de deux surfaces cylindriques à bases quelconques.

Solution. Lorsque, dans la recherche qui donne lieu à la question dont il s'agit, on n'a pas d'autres intersections à considérer que celle des deux surfaces cylindriques, et surtout quand ces surfaces sont à bases circulaires, il est avantageux de choisir les plans de projection de manière que l'un d'entre eux soit parallèle aux génératrices des deux cylindres : par là, l'intersection se construit sans employer

d'autres courbes que celles qui sont données. Mais, lorsque l'on doit considérer en même temps les intersections de ces surfaces avec d'autres, il n'y a plus d'avantage à changer de plans de projection, et même il est plus facile de se représenter les objets en les rapportant tous aux mêmes plans.

Nous allons donc supposer les génératrices des deux surfaces, placées d'une manière quelconque par rapport aux plans de projection.

Soient donc (pl. 17, fig. 34) TFF'U, XGG'V, les traces horizontales données des deux surfaces cylindriques; AB, *ab*, les projections données de la droite à laquelle la génératrice de la première doit être parallèle; CD, *cd*, celles de la droite à laquelle doit être parallèle la génératrice de la seconde. On concevra une série de plans parallèles aux deux génératrices. Ces plans couperont les deux surfaces dans des lignes droites; et les rencontres des deux sections faites dans la première surface, par les sections faites dans la seconde, détermineront les points de l'intersection demandée.

Ainsi, après avoir construit, comme dans la figure 15 (pl. 5), la trace horizontale AE d'un plan mené par la première droite donnée parallèlement à la seconde, on mènera parallèlement à cette trace tant de droites FG' qu'on voudra, et l'on regardera ces parallèles comme les traces des plans de la série. Chaque droite FG' coupera la trace de la première surface en des points F, F', et celle de la seconde en d'autres points G, G', par lesquels on mènera aux projections des génératrices respectives les parallèles FH, F'H,... GJ, G'J'...; et les points de rencontre P, Q, R, S, de ces droites, seront les projections horizontales d'autant de points de l'intersection des deux surfaces. En opérant de même pour la suite des droites FG', on trouvera une suite de systèmes de points, P, Q, R, S, et la courbe

qui passera par tous les points trouvés de la même manière sera la projection horizontale de l'intersection.

Pour avoir la projection verticale, on projettera sur LM les points F, F',... G, G'... en *f*, *f'*,... *g*, *g'*..., et, par ces derniers points, on mènera aux projections des génératrices respectives les parallèles *fh*, *f'h'*,... *gi*, *g'i'*,... qui, par leurs rencontres, détermineront les projections verticales *p*, *q*, *r*, *s* des points de l'intersection. En opérant de même pour toutes les autres droites FG', on aura de nouveaux points *p*, *q*, *r*, *s*; et la courbe qui passera par tous ces points sera la projection verticale de l'intersection.

Pour avoir les tangentes de ces courbes aux points P et *p*, on construira la trace horizontale F'Y du plan tangent en ce point à la première surface cylindrique; puis la trace G'Y du plan tangent en ce même point à la seconde; et la droite, menée du point P au point Y de rencontre de ces traces, sera la tangente en P. Enfin, projetant Y sur LM en *y*, et menant la droite *py*, on aura la tangente au point *p* de la projection verticale.

83. *Huitième question.* Construire l'intersection de deux surfaces de révolution, dont les axes sont dans un même plan.

Solution. On disposera les plans de projection de manière que l'un d'entre eux soit perpendiculaire à l'axe d'une des surfaces, et que l'autre soit parallèle aux deux axes. D'après cela, soient A (pl. 18, fig. 35) la projection horizontale de l'axe de la première surface, *aa'* sa projection verticale, et *cde* la génératrice donnée de cette surface. Soit AB, parallèle à LM, la projection horizontale de l'axe de la seconde surface, *a'b* sa projection verticale, de manière que A et *a'* soient les projections du point de rencontre des deux axes; et soit *fgh* la génératrice donnée de cette seconde surface. On concevra une série de surfaces sphériques, dont le centre commun est placé au point de

concours des deux axes. Pour chacune des surfaces de cette série, on construira la projection *iknopq* du grand cercle parallèle au plan vertical de projection ; et ces projections, qui seront des arcs de cercle décrits du point *a'* comme centre, et avec des rayons arbitraires, couperont les deux génératrices en des points *k*, *p*.

Cela posé, chaque surface sphérique coupera la première surface dans la circonférence d'un cercle, dont le plan sera perpendiculaire à l'axe *aa'*, dont on aura la projection verticale en menant l'horizontale *ko*, et dont on aura la projection horizontale en décrivant, du point A comme centre, et d'un diamètre égal à *ko*, la circonférence de cercle KROR'. De même chaque surface sphérique de la série coupera la seconde surface de révolution dans la circonférence d'un cercle dont le plan sera perpendiculaire au plan vertical de projection, et dont on aura la projection verticale en menant par le point *p* une droite *ppn* perpendiculaire à *a'b*.

Si le point *r*, dans lequel se coupent les deux droites *ko*, *pn*, est plus près des deux axes respectifs que n'en sont les points *k*, *p*, il est évident que les deux circonférences de cercles se couperont en deux points, dont le point *r* sera la projection verticale commune ; et la courbe menée par tous les points *r*, construits de la même manière, sera la projection verticale de l'intersection des deux surfaces. Projetant le point *r* sur la circonférence du cercle KROR' en R et R', on aura les projections horizontales des deux points de rencontre des circonférences de cercles qui se trouvent sur la même sphère ; et la courbe menée par tous les points R, R', construits de la même manière, sera la projection horizontale de l'intersection demandée.

Ces exemples doivent suffire pour faire connaître la manière dont il faut employer la méthode de construire les intersections des surfaces, et de leur mener des tangentes,

surtout si les élèves s'appliqnent à constrnire avec la plus grande exactitude, s'ils emploient de grandes dimensions, et si, autant qu'il sera possible, ils tracent les courbes dans toute leur étendue.

84. Dans tout ce qni précède, nous avons regardé les courbes à double courbure comme déterminées chacune par deux surfaces courbes dont elle est l'intersection, et c'est, en effet, le point de vue sous lequel elles se présentent le le plns ordinairement dans la Géométrie descriptive. Dans ce cas, nous avons vu qu'il est toujours possible de leur mener des tangentes. Mais, de même qu'une surface courbe peut-être définie au moyen de la forme et du mouvement de sa génératrice, il peut arriver aussi qu'une courbe soit donnée par la loi du monvement d'un point génératenr; et alors, pour lui mener une tangente, si l'on ne veut pas avoir recours à l'Analyse, on peut employer la méthode de Roberval. Cette méthode, qu'il inventa avant que Descartes eût appliqué l'Algèbre à la Géométrie, est implicitement comprise dans les procédés du Calcul différentiel, et c'est pour cela qne les élémens de Mathématiques n'en font pas mention; nous nous contenterons ici de l'exposer d'une manière sommaire. Ceux qui désireront en voir des applications nombreuses pourront consulter les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, antérienrs à 1699, dans lesquels les ouvrages de Roberval ont été recneillis.

85. Lorsque, d'après la loi de son mouvement, un point générateur est perpétuellement poussé vers un point de l'espace, la ligne qu'il parcourt en vertu de cette loi est droite : mais si, dans chaque instant de son mouvement, il est en même temps poussé vers deux points, la ligne qu'il parcourt, et qni, dans quelques cas particnliers, peut encore être une droite, est en général une ligne courbe. On aura la tangente à cette conrbe en menant par le point de la courbe deux droites, suivant les deux directions différentes du mou-

vement du point générateur, en portant sur ses directions, et dans le sens convenable, des parties proportionnelles aux deux vitesses respectives de ce point, en achevant le parallélogramme, et en menant la diagonale, qui sera la tangente demandée; car cette diagonale sera dans la direction du mouvement du point décrivant, au point de la courbe que l'on considère.

86. Nous ne citerons qu'un seul exemple.

Un fil AMB (pl. 18, fig. 36) étant attaché par ses extrémités à deux points fixes A, B, si, au moyen d'une pointe M, on tend ce fil, et si l'on fait mouvoir la pointe de manière que le fil soit toujours tendu, la pointe décrira une courbe DCM qui, comme on sait, est une ellipse dont les points fixes A, B, sont les foyers. D'après la génération de cette courbe, il est très-facile de lui mener nne tangente par la méthode de Roberval. En effet, puisque la longueur du fil ne change pas, dans chaque instant du mouvement le rayon AM s'alonge de la même quantité dont le rayon BM se raccourcit. La vitesse du point décrivant dans la direction AM est donc égale à sa vitesse dans la direction MQ. Donc, si l'on porte sur MB, et sur le prolongement de AM, des droites égales MQ, MP, et si l'on achève le parallélogramme MPRQ, la diagonale MR de ce parallélogramme sera la direction du point générateur en M, et par conséquent la tangente au même point de la courbe. On voit clairement, d'après cela, que, dans l'ellipse, la tangente partage en deux parties égales l'angle BMP formé par un des rayons vecteurs et par le prolongement de l'autre; que les angles AMS et BMR sont égaux entre enx, et que la courbe doit avoir la propriété de réfléchir à un des foyers les rayons de lumière émanés de l'autre.

Il est facile d'étendre la méthode de Roberval au cas des trois dimensions, et de l'appliquer à la construction des tangentes des courbes à double courbure. En effet, si un

point générateur se meut dans l'espace, de manière qu'à chaque instant de son mouvement il soit poussé vers trois points différens, la ligne qu'il parcourt, et qui, dans quelques cas particuliers, peut être plane et même droite, est en général une courbe à double courbure. On aura la tangente de cette courbe en un point quelconque, en menant par ce point des droites, suivant les trois directions différentes des mouvemens du point générateur ; en portant sur ces droites, et dans le sens convenable, des parties proportionnelles aux trois vitesses respectives de ce point, en achevant le parallélépipède, et en menant la diagonale du parallélépipède, qui sera la tangente de la courbe au point que l'on considère.

87. Nous allons appliquer cette méthode à un cas analogue à celui de l'ellipse ; et la fig. 37, pl. 18, que nous allons employer, représentera l'objet en perspective, et non pas en projection.

Trois points fixes A, B, C étant donnés dans l'espace, soit un premier fil AMB attaché par ses deux extrémités aux points A et B ; soit un autre fil AMC, d'une grandeur indépendante de celle du premier, et qui soit attaché par ses extrémités aux deux points A et C ; si un point générateur, saisissant en même temps les deux fils, se meut de manière que ces fils soient toujours tendus, il parcourra une courbe à double courbure (*). Pour mener à cette courbe une tan-

---

(*) M. Dupin, en s'occupant de la détermination d'une sphère tangente à trois autres, a fait voir que la courbe indiquée ci-dessus comme à double courbure, est plane et du second degré, ce qui tient à la théorie générale du nombre indéfini de foyers qui appartiennent à chaque courbe du deuxième degré. *Voyez* la *Correspondance* sur l'École Polytechnique, tome I, page 22 ; tome II, page 387 ; et les *Développemens de Géométrie,* par M. Dupin, page 280. (Note communiquée par M. Dupin.)

gente au point M, il faut remarquer que la longueur du premier fil AMB étant constante dans chaque instant du mouvement, la quantité dont la partie AM s'alonge est égale à celle dont la partie MB se raccourcit, et que la vitesse du point générateur dans la direction AM est égale à sa vitesse dans la direction MB. De même, la longueur du fil AMC étant constante, la vitesse du point générateur dans la direction MC est encore égale à sa vitesse dans la direction AM. Donc, si sur le prolongement de AM, et sur les droites MB, MC, on porte les parties égales MP, MQ, MR, et si l'on achève le parallélépipède MPUSVQRT, la diagonale MS de ce parallélépipède sera la tangente demandée.

Comme la méthode de Roberval est fondée sur le principe de la composition du mouvement, il est facile d'apercevoir que, dans les cas moins simples que ceux que nous avons choisis pour exemples, on peut s'aider des méthodes connues pour trouver la résultante de forces qui sont dirigées vers un point, et dont on connaît les grandeurs et les directions.

IV.

Application de la méthode de construire les intersections des surfaces courbes à la solution de diverses questions.

88. Nous avons donné (pl. 11, fig. 26) la méthode de construire les projections de l'intersection de deux surfaces courbes définies de forme et de position; et nous l'avons fait d'une manière abstraite, c'est-à-dire sans nous occuper de la nature des questions qui pourraient rendre nécessaires de pareilles recherches. L'exposition de cette méthode, considérée d'une manière abstraite, serait suffisante pour le plus grand nombre des arts; car, si l'on prend pour exem-

ples l'art de la coupe des pierres et celui de la charpenterie, les surfaces courbes que l'on y considère, et dont on peut avoir besoin de construire les intersections, forment ordinairement l'objet principal dont on s'occupe, et elles se présentent naturellement. Mais la Géométrie descriptive devant devenir un jour une des parties principales de l'éducation nationale, parce que les méthodes qu'elle donne sont aussi nécessaires aux artistes que le sont la lecture, l'écriture et l'arithmétique, nous croyons qu'il est utile de faire voir par quelques exemples comment elle peut suppléer l'Analyse pour la solution d'un grand nombre de questions qui, au premier aperçu, ne paraissent pas de nature à devoir être traitées de cette manière. Nous commencerons d'abord par des exemples qui n'exigent que les intersections de plans; nous passerons ensuite à ceux pour lesquels les intersections de surfaces courbes sont nécessaires.

89. La première question qui frappe d'une manière remarquable ceux qui apprennent les élémens de Géométrie ordinaire, est la recherche du centre du cercle dont la circonférence passe par trois points placés arbitrairement sur un plan. La détermination de ce centre par l'intersection de deux lignes droites, sur chacune desquelles il doit se trouver nécessairement, frappe les élèves, et par sa généralité, et parce qu'elle donne un moyen d'exécution. Si toute la Géométrie était traitée de cette manière, ce qui est possible, elle conviendrait à un plus grand nombre d'esprits; elle serait cultivée et pratiquée par un plus grand nombre d'hommes; l'instruction moyenne de la nation serait plus avancée, et la science elle-même serait poussée plus loin. Il existe dans les trois dimensions une question analogue à celle que nous venons de citer, et c'est par elle que nous allons commencer.

90. *Première question.* Trouver le centre et le rayon d'une sphère dont la surface passe par quatre points donnés arbitrairement dans l'espace.

Solution. Les quatre points étant donnés par leurs projections horizontales et verticales, on concevra par l'un d'eux des droites menées à chacun des trois autres, et l'on tracera les projections horizontales et verticales de ces trois droites. Puis, considérant la première de ces droites, il est évident que le centre demandé devant être à égale distance de ces deux extrémités, il doit se trouver sur le plan perpendiculaire à cette droite, et mené par son milieu. Si dono on divise en parties égales les projections de la droite, ce qui donnera les projections de son milieu, et si l'on construit les traces du plan mené par le point perpendiculairement à la droite, ce que nous savons faire, on aura les traces d'un plan sur lequel le centre demandé doit se trouver. Considérant ensuite les deux autres droites, et faisant successivement pour chacune d'elles la même opération, on aura les traces des trois plans différens, sur chacun desquels doit se trouver le centre demandé. Or, de ce que le centre doit être sur le premier de ces plans et sur le second, il doit être sur la droite de leur intersection; donc, si l'on construit les projections de cette intersection, on aura, sur chaque plan de projection, une droite qui contiendra la projection du centre. Par la même raison, si l'on construit les projections de l'intersection du premier plan et du troisième, on aura encore, sur chaque plan de projection, une autre droite qui contiendra la projection du centre. Donc, sur chaque plan de projection, on aura deux droites qui, par leur intersection, détermineront la projection demandée du centre de la sphère.

Si l'on employait l'intersection du second plan et du troisième, on aurait une troisième droite qui passerait par le centre, et dont les projections passeraient encore par les projections demandées, ce qui fournit un moyen de vérification.

Quant au rayon, il est évident que si, par la projection

du centre et par celle d'un des points donnés, on mène une droite, elle sera sa projection; on pourra donc avoir la projection horizontale et la projection verticale du rayon, et par conséquent sa grandeur.

91. Si l'on est libre de choisir la position des plans de projection, la méthode précédente peut être considérablement simplifiée. En effet, supposons que celui de ces plans que nous regardons comme horizontal (pl. 19, fig. 38) passe par trois des points donnés, de manière que des projections données A, B, C, D des quatre points, les trois premières se confondent avec leurs points respectifs; puis, après avoir mené les trois droites AB, AC, AD, supposons que le plan vertical soit parallèle à AD, c'est-à-dire que les droites LM et AD soient parallèles entre elles: les projections verticales des trois premiers points seront sur LM en des points *a*, *b*, *c*, et celle du quatrième sera donnée quelque part en un point *d* de la droite D*d* perpendiculaire à LM. Cela posé, la droite menée du point A au point B étant horizontale, tout plan qui lui sera perpendiculaire sera vertical, et aura pour projection horizontale une droite perpendiculaire à AB. Il en est de même pour la droite menée du point A au point C. Donc, si, sur le milieu de AB, on lui mène la perpendiculaire indéfinie E*e*, cette perpendiculaire sera la projection horizontale d'un plan vertical qui passe par le centre de la sphère; donc la projection horizontale du centre sera quelque part sur la droite E*e*. De même, si, sur le milieu de AC, on lui mène la perpendiculaire indéfinie F*f*, cette perpendiculaire sera la projection d'un second plan vertical qui passe par le centre de la sphère, et la projection horizontale de ce centre sera quelque part sur un point de la droite F*f*; donc le point G d'intersection des deux droites E*e*, F*f*, sera la projection horizontale du centre de la sphère, dont la projection verticale sera, par conséquent, sur la droite indéfinie de projection G*gg'*.

La droite menée du point A au quatrième point étant parallèle à sa projection verticale *ad*, tout plan qui lui sera perpendiculaire sera aussi perpendiculaire au plan vertical de projection, et aura pour projection verticale une droite perpendiculaire à *ad*. Donc, si sur le milieu de *ad* on lui mène une perpendiculaire indéfinie H*h*, on aura la projection d'un troisième plan qui passe par le centre de la sphère; donc la projection verticale de ce centre, devant se trouver en même temps et sur *gg'* et sur H*h*, sera au point K d'intersection de ces deux droites.

Enfin, si l'on mène les deux droites AG, *a*K, on aura évidemment les deux projections d'un même rayon de la sphère; dono, si l'on porte AG sur LM, de *g* en J, la droite JK sera la grandeur du rayon demandé.

92. *Deuxième question*. Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire donnée, c'cst-à-dire trouver la position du centre de la sphère, et la grandeur de son rayon.

Solution. La surface de la sphère inscrite devant toucher les quatre faces de la pyramide, il est évident que si, par le centre de la sphère et par chacune des six arêtes, on conçoit un plan, ce plan partagera en deux parties égales l'angle que forment entre elles les deux faces qui passent par la même arète. Si donc parmi les six arètes on en choisit trois qui ne passent pas toutes par le même sommet d'angle solide, et si par chacune de ces arètes on fait passer un plan qui partage en deux parties égales l'angle formé par les deux faces correspondantes, ou aura trois plans, sur chacun desquels le centre de la sphère demandée doit se trouver, et qui, par leur intersection commune, doivent déterminer la position de ce centre.

93. Pour simplifier la construction, nous supposerons que les plans de projection aient été choisis de manière que celui que nous regarderons comme horizontal soit le même qu'une des faces de la pyramide.

Soientdonc (fig. 39, pl. 20), A, B, C, D, les projections horizontales données des sommets des quatre angles solides de la pyramide, et *a*, *b*, *c*, *d'*, leurs projections verticales; par le sommet de la pyramide, on concevra des plans perpendiculaires aux trois côtés de la base ; ces plans seront verticaux , et leurs projections horizontales seront les droites DE, DF, DG, abaissées perpendiculairement du point D sur les côtés AC, CB, BA de la base. Chacun de ces plans coupera la base de la pyramide et la face qui passe par l'arête, en deux droites qui comprendront entre elles un angle égal à celui que la face forme avec la base. Si donc on porte sur LM les droites DE, DF, DG, à partir de la verticale D*dd'*, de *d* en *e*, *f*, *g*, et si par le sommet *d'* on mène les droites *d'e*, *d'f*, *d'g*, ces droites formeront avec LM des angles égaux à ceux que les faces correspondantes de la pyramide forment avec la base; et si l'on partage chacun de ces trois angles en deux parties égales par les droites *ee'*, *ff'*, *gg'*, les angles que ces dernières droites formeront avec LM seront égaux à ceux que formeraient avec la base les faces d'une seconde pyramide qui aurait la même base que la pyramide donnée, et dont le sommet serait au centre de la sphère demandée.

Pour trouver le sommet de cette seconde pyramide, on la coupera par un plan horizontal mené à une hauteur arbitraire, et dont on aura la projection verticale en menant une horizontale quelconque *pn*. Cette droite coupera *ee'*, *ff'*, *gg'*, en des points *h'*, *i'*, *k'*, desquels on abaissera sur LM les verticales *h'h*, *i'i*, *k'k*; et si l'on porte les trois distances *eh*, *fi*, *kg*, sur les perpendiculaires respectives de E en H, de F en J et de G en K, on aura en H, J, K, les projections horizontales des points pris dans les trois faces de la seconde pyramide, et qui se trouvent sur le plan horizontal arbitraire. Donc, si par les points H, J, K, on mène aux côtés respectifs de la base des parallèles PN, NO, OP, ces

droites seront les projections des sections des trois faces de la seconde pyramide par le même plan horizontal; elles se couperont en des points N, O, P, qui seront les projections d'autant de points des trois arètes de la seconde pyramide; et si par ces points on mène aux sommets des angles respectifs de la base des droites indéfinies AP, BO, CN, ces droites seront les projections des arètes; enfin, le point unique Q, dans lequel elles se rencontreront toutes trois, sera la projection horizontale du sommet de la seconde pyramide, et par conséquent du centre de la sphère demandée.

Pour avoir la projection verticale de ce centre, on mènera d'abord la droite indéfinie de projection Qqq', sur laquelle elle doit se trouver; puis on projettera les trois points N, O, P, sur l'horizontale np en n, o, p; par les projections a, b, c des sommets des angles respectifs de la base, on mènera les droites ab, bo, cn, qui seront les projections verticales des trois arètes; et le point unique q', dans lequel ces trois dernières droites se couperont, et qui sera en même temps sur la droite Qqq, sera la projection verticale du centre de la sphère.

Enfin, la verticale qq' sera évidemment égale au rayon de la sphère inscrite, et les points Q, q seront les projections du point de contact de la surface de la sphère avec le plan de la base.

94. Nous avons faire voir (3) par quelles considérations on pouvait déterminer la position d'un point, lorsqu'on connaissait ses distances à trois points connus de position; nous allons actuellement donner la construction de cette question.

Troisième question. Construire les projections d'un point dont on connaît les distances à trois autres points donnés dans l'espace.

Solution. Nous supposerons les plans de projection choisis, de manière que celui que nous regarderons comme

horizontal passe par les trois points donnés, et que l'autre soit perpendiculaire à la droite qui joint deux de ces points. D'après cela, soient A, B, C (fig. 40, pl. 19), les trois points donnés ; A', B', C', les distances données de ces points au point demandé. On joindra deux des points par la droite AB, perpendiculairement à laquelle on mènera la droite LM qui détermine la position du plan vertical de projection. Puis, des points A, B, C, comme centres, et avec des rayons égaux aux distances respectives A', B', C', on décrira trois arcs de cercles qui se couperont deux à deux en des points D, E, F, J, P, Q; par les points d'intersection de ces arcs considérés deux à deux, on mènera les droites DE, FJ, PQ, qui seront les projections horizontales des circonférences de cercles dans lesquelles les trois sphères se coupent ; et le point unique N, dans lequel ces trois droites se rencontreront, sera évidemment la projection horizontale du point demandé.

Pour avoir la projection verticale du même point, on mènera la ligne de projection indéfinie N*nn'*; puis, observant que le cercle projeté en DE est parallèle au plan vertical, et que sa projection sur ce plan doit être un cercle de même rayon, on projettera la droite AB sur LM au point *r* duquel, comme centre, et avec un intervalle égal à DR, ou à la moitié de DE, on décrira le cercle *dnen'*; et la circonférence de ce cercle coupera la droite N*nn'* en deux points *n*, *n'*, qui seront indifféremment la projection verticale du point demandé.

Ce sera d'après les autres circonstances de la question qu'on déterminera si les deux points *n* et *n'* doivent être tous deux employés, et, dans le cas où il n'y en aurait qu'un de nécessaire, quel est celui qui doit être rejeté.

Le lecteur pourra se proposer de construire les projections d'un point dont on connaît les distances à trois lignes données dans l'espace.

95. *Quatrième question.* Un ingénieur parcourant un pays de montagnes, soit pour étudier la forme du terrain, soit pour faire le projet de travaux publics qui dépendent de cette forme, est muni d'une carte topographique, dans laquelle non-seulement les projections des différens points du terrain sont exactes, mais encore les hauteurs de tous ces points au-dessus d'une même surface de niveau sont indiquées par des nombres placés à côté des points respectifs, et auxquels on a coutume de donner le nom de *cotes*. Il rencontre un point remarquable qui n'est pas placé sur la carte, soit parce qu'il a été omis, soit parce qu'il a été rendu remarquable depuis la confection de la carte. L'ingénieur ne porte avec lui d'autre instrument d'observation qu'un graphomètre propre à mesurer les angles, et cet instrument est garni d'un fil-à-plomb.

On demande que, sans quitter la station, il construise sur la carte la position du point où il est, et qu'il trouve la cote qui convient à ce point, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus de la surface de niveau.

Moyen de solution. Parmi les points du terrain masqués d'une manière précise sur la carte, et qui seront les plus voisins, l'ingénieur en distinguera trois, dont deux au moins ne soient pas à même hauteur que lui; puis il observera les angles formés par la verticale et les rayons visuels dirigés à ces trois points, et, d'après cette seule observation, il pourra résoudre la question.

En effet, nommons A, B, C les trois points observés dont il a les projections horizontales sur la carte, et dont il pourra construire les projections verticales au moyen de leurs cotes. Puisqu'il connaît l'angle formé par la verticale et par le rayon visuel dirigé au point A, il connaît aussi l'angle formé par le même rayon et par la verticale élevée au point A; car en négligeant la courbure de la terre, ce qui est convenable, ces deux angles sont alternes-internes,

et par conséquent égaux. Si donc il conçoit une surface conique à base circulaire, dont le sommet soit au point A, dont l'axe soit vertical, et dont l'angle formé par l'axe et par la droite génératrice soit égal à l'angle observé, ce qui détermine complètement cette surface, elle passera par le rayon visuel dirigé au point A, et par conséquent par le le point de la station : ainsi il aura une première surface courbe déterminée, sur laquelle se trouvera le point demandé. En raisonnant pour les deux autres points B, C, comme pour le premier, le point demandé se trouvera encore sur deux autres surfaces coniques à bases circulaires, dont les axes seront verticaux, dont les sommets seront aux points B, C, et pour chacune desquelles l'angle formé par l'axe et par la génératrice sera égal à l'angle formé par la verticale et par le rayon visuel correspondant. Le point demandé sera donc en même temps sur trois surfaces coniques déterminées de forme et de position, et par conséquent dans leur intersection commune. Il ne s'agit donc plus que de construire, d'après les données de la question, les projections horizontales et verticales des intersections de ces trois surfaces considérées deux à deux ; les intersections de ces projections donneront les projections horizontale et verticale du point demandé, et par conséquent la position de ce point sur la carte, et sa hauteur au-dessus ou au-dessous des points observés, ce qui déterminera sa cote.

Cette solution doit en général produire huit points qui satisfont à la question; mais il sera facile à l'observateur de distinguer parmi ces huit points celui qui coïncide avec le point de la station. D'abord, il pourra toujours s'assurer si le point de la station est au-dessus ou au-dessous du plan qui passe par les trois points observés. Supposons que ce plan soit au-dessus du plan des sommets des cônes; il sera autorisé à négliger les branches des intersections des surfaces coniques qui existent au-dessous de ce plan; par là

le nombre des points possibles sera réduit à quatre. Ce serait la même chose si le point de la station était au contraire placé au-dessous du plan. Ensuite, parmi ces quatre points, s'ils existent tous, il reconnaîtra facilement celui dont la position, par rapport aux trois sommets, est la même que celle du point de la station par rapport aux points observés.

96. *Construction.* Soient A, B, C (pl. 21, fig. 41), les projections horizontales des trois points observés, prises sur la carte; *a, b, c*, les projections verticales des mêmes points, construits en portant sur les verticales B*b*, C*c*, à partir de l'horizontale LM, qui passe par le point *a*, la différence des cotes des deux autres points; et soient A′, B′, C′, les angles observés que les rayons visuels, dirigés aux points respectifs A, B, C, forment avec la verticale.

On mènera les verticales indéfinies *aa′*, *bb′*, *cc′*, qui seront les projections verticales des axes des trois cônes; par les trois points *a*, *b*, *c*, on mènera les droites *al*, *bm*, *cn*, qui formeront avec ces verticales des angles respectivement égaux aux angles donnés A′, B′, C′; et ces droites seront chacune la projection verticale de l'un deux côtés extrêmes de la surface conique correspondante.

Cela fait, on mènera dans la projection verticale tant de droites horizontales *ee′* qu'on voudra; on les regardera comme les projections d'autant de plans horizontaux, et pour chacune d'elles, on fera l'opération que nous allons décrire pour celle d'entre elles qui est indiquée par EE′.

Cette droite coupera les projections des axes des trois cônes en des points *f*, *g*, *h*, qui seront les projections verticales des centres des cercles suivant lesquels le plan horizontal correspondant coupe les trois surfaces coniques; et elle coupera les côtés extrêmes des cônes *al*, *bm*, *cn*, en des points *f′*, *g′*, *h′*, tels que les distances *ff′*, *gg′*, *hh′*, seront les rayons de ces mêmes cercles. Des points A, B, C, pris successive-

ment pour centres, et avec des rayons respectivement égaux à ff', gg', hh', on décrira des cercles dont les circonférences seront les projections horizontales des sections faites dans les trois surfaces coniqnes par le même plan EE'; ces circonférences se couperont deux à deux dans des points D, D', K, K', J, J', qui seront les projections d'autant de points des trois intersections des surfaces coniques considérées deux à deux; et en projetant ces points sur EE' en d, d', k, k', i, i', on aura les projections verticales des mêmes points des trois intersections.

En opérant ensuite de même pour les autres droites ee', on trouvera pour chacune d'elles de nouveaux points D, D', K, K', J, J', dans la projection horizontale, et de nouveaux points d, d', k, k', i, i', dans la projection verticale; puis par tous les points D, D'....., on fera passer une conrbe DPD', qui sera la projection horizontale de l'intersection de la première surface conique avec la seconde; par tous les pointsK, K'....on fera passer une autre courbe, K P K', qui sera la projection de l'intersection de la seconde surface et de la troisième; et par tous les points J, J'..., on en fera passer une dernière JPJ' qui sera la projection de l'intersection de la troisièmc surface et de la première. Les points P...., dans lesquels ces courbes se couperont toutes trois, seront les projections horizontales d'autant de points qui satisfont à la qnestion.

Dc même dans la projection verticale, par tous les points d, d'....., on fera passer une première courbe; par tous les points k, k'...., une seconde; et par tous les points i, i'..., une troisième. Ces conrbes seront les projections verticales des intersections des trois surfaces considérées deux à deux; et les points p...., dans lequels ces courbes se couperont toutes trois, seront les projections verticales de tous les points qui satisfont à la question.

Les projections P, p d'un même point seront dans une même perpendiculaire à LM.

L'observateur, après avoir reconnu, parmi tousles points P, celui appartient au point de la station, aura la projection horizontale de cette station, et par conséquent sa position sur la carte ; puis, au moyen de la hauteur du point correspond *p* au-dessns de la droite LM, il aura l'élévation du point de la station au-dessus du point observé A, et par conséquent il trouvera la cote qui convient à la station.

97. Dans cette solution, nous avons construit les projections des trois intersections des surfaces, tandis que deux auraient suffi. Nous conseillons d'agir toujours de même, parce que les projections des deux courbes à double courbure peuvent se couper en des points qni ne correspondent pas à des points d'intersection, et que, pour reconnaître les projections des points d'intersection, il faut suivre les branches des deux courbes qui sont sur la même nappe d'nne des surfaces ; ce qui exige une attention pénible, dont on est presque toujours dispensé en construisant les trois courbes : les points où elles se coupent toutes trois sont de véritables points d'intersection.

98. *Cinquième question*. Les circonstances étant les mêmes que dansla question précédente, avec cette seule différence que l'instrument n'est pas garni de fil-à-plomb, de manière que les angles avec la verticale ne puissent pas être mesurés, on demande encore que l'ingénieur, sans quitter la station, détermine sur la carte la position du point où il est, et qu'il trouve la cote de ce point, c'est-à-dire son élévation an-dessns de la surface de niveau à laquelle tous les points de la carte sont rapportés.

Moyen de solution. Après avoir choisi trois points du terrain qui soient marqués d'une manière précise sur la carte, et tels que le point de station ne soit pas aveo eux dans le même plan, l'ingénieur mesurera les trois angles que forment entre enx les rayons visuels dirigés à ces trois points, et an moyen de cette seule observation, il sera en état de résoudre la question.

En effet, si nous nommons A, B, C les trois points observés, et si on les suppose joints par les trois droites AB, BC, CA, l'ingénieur aura les projections horizontales de ces droites tracées sur la carte; de plus, au moyen des cotes des trois points, il aura les différences de hauteur des extrémités de ces droites; il pourra donc avoir la grandeur de chacune d'elles.

Cela posé, si dans un plan quelconque mené par AB on conçoit un triangle rectangle BAD (pl. 22, fig. 42), construit sur AB comme base, et dont l'angle en B soit le complément de l'angle sous lequel le côté AB a été observé, l'angle en D sera égal à l'angle observé, et la circonférence de cercle décrite par les trois points A, B, D jouira de la propriété que, si d'un point quelconque E de l'arc ADB, on mène deux droites aux points A et B, l'angle en E qu'elles comprendront entre elles sera égal à l'angle observé. Si donc on conçoit que le plan du cercle tourne autour de AB comme charnière, l'arc ADB engendrera une surface de révolution dont tous les points jouiront de la même propriété; c'est-à-dire que, si d'un point quelconque de la surface, on mène deux droites aux points A et B, ces droites formeront entre elles un angle égal à l'angle observé. Or, il est évident que les points de cette surface de révolution sont les seuls qui jouissent de cette propriété; donc la surface passera par le point de la station. Si l'on raisonne de la même manière pour les deux autres droites BC, CA, on aura deux autres surfaces de révolution sur chacune desquelles se trouvera le point de la station; ce point sera donc en même temps sur trois surfaces de révolutions différentes, déterminées de forme et de position; il sera donc un point de leur intersection commune. Ainsi, en construisant les projections horizontales et verticales des intersections de ces trois surfaces considérées deux à deux, les points où les projections se couperont elles-mêmes toutes trois seront les projections du point qui satis-

fait à la question. La projection horizontale donnera la position du point sur la carte, et la projection verticale donnera l'élévation de ce point au-dessus ou au-dessous des points observés.

99. Si cette question était traitée par l'Analyse, elle conduirait généralement à une équation du soixante-quatrième degré; car chacune des surfaces de révolution a quatre nappes distinctes, dont deux sont engendrées par l'arc de cercle ADB, et dont les deux autres sont engendrées par l'arc AFB. Chacune des nappes de la première pouvant être coupée par toutes celles de la seconde, il peut en résulter seize branches dans la courbe d'intersection; et les seize branches pouvant être coupées par les quatre nappes de la troisième surface, il peut en résulter soixante-quatre points d'intersection des trois surfaces : mais ces points ne satisferaient pas tous à la question. En effet, si d'un point quelconque F de l'arc AFB on mène des droites aux extrémités de AB, l'angle AFB qu'elles comprendront ne sera pas égal à l'angle observé; il en sera le supplément. Les nappes engendrées par l'arc AFB, et les nappes analogues dans les autres surfaces de révolution, ne peuvent donc servir à résoudre la question; et tous les points d'intersection qui appartiennent à quelques-unes de ces nappes sont des points étrangers au problème.

Dans la Géométrie descriptive, on peut et l'on doit exclure l'arc AFB et ses analogues dans les deux autres surfaces; chacune de ces surfaces n'a plus alors que deux nappes, et le nombre de leurs points d'intersection possibles se réduit à huit. De ces huit points, quatre sont d'un côté du plan qui passe par les trois axes de révolution, et quatre sont de l'autre. L'observateur connaissant toujours de quel côté il est placé par rapport à ce plan, il ne construira pas les intersections qui sont placées de l'autre côté, et le nombre des points qu'il pourra trouver est réduit à quatre. Enfin, parmi

ces quatre points, s'ils existent tous, il reconnaîtra facilement celui qui sera placé par rapport aux points A, B, C, de la même manière que celui de la station l'est par rapport aux trois points du terrain qu'il a observés.

100. *Construction.* On choisira la position des deux plans de projections, de manière que celui que nous regardons comme horizontal passe par les trois points observés, et que l'autre soit perpendiculaire à la droite menée par deux de ces trois points. Soit donc ABC (pl. 22, fig. 42), le triangle formé par les points observés, considéré dans son plan, et A', B', C', les trois angles donnés par l'observation. On mènera perpendiculairement au côté AB la droite LM qui indiquera la position du plan vertical de projection; et l'on construira, comme nous venons de l'indiquer (98), les arcs de cercle générateurs ADEB, BGC, CLA des trois surfaces de révolution, dont les côtés AB, BC, AC sont les axes. Cela fait, du point A comme centre, on décrira tant d'arcs de cercle EOL que l'on voudra, et qui couperont les génératrices dont les axes se rencontrent en A, dans des points E, L, desquels on abaissera sur les axes respectifs les perpendiculaires indéfinies EE' LL'; ces perpendiculaires se couperont quelque part en un point H qui sera la projection horizontale d'un point d'intersection des deux surfaces dont les axes sont AB et AC, et la courbe AHP menée par tous les points H.... trouvés de cette manière, sera la projection horizontale de cette intersection. Puis, après avoir projeté l'axe AB en *a*, on décrira du point *a* comme centre, et avec des rayons successivement égaux aux perpendiculaires EE', des arcs de cercle *ee'h*, sur chacun desquels projetant le point H correspondant en *h*, on aura la projection verticale d'un point de l'intersection des deux mêmes surfaces de révolution; et la courbe *ahp* menée par tous les points *h*... construits de cette manière, sera la projection verticale de cette intersection.

On opérera de même pour les deux surfaces de révolution autour des axes AB, BC; c'est-à-dire, du point B de rencontre des deux axes, comme centre, on décrira tant d'arcs de cercle MKG que l'on voudra; ces arcs couperont les deux génératrices en des points M, G, desquels on abaissera sur les axes respectifs les perpendiculaires indéfinies MM', GG'; ces perpendiculaires se couperont en un point J; et la courbe BJP menée par tous les points J... sera la projection horizontale de l'intersection de la première et de la troisième surface de révolution. Du point *a* comme centre, et avec des rayons successivement égaux aux perpendiculaires MM', on décrira des arcs de cercles *mm'i*, sur lesquels on projettera en *i* les points J correspondans; et la courbe *aip*, menée par tous les points *i*, sera la projection verticale de la même intersection.

Cela fait, tous les points P.... dans losquels les deux courbes AHP, BJP se couperont, seront les projections horizontales d'autant de points qui satisfont à la question; et tous les points *p*.... dans lesquels se couperont les courbes *ahp*, *aip*, seront les projections verticales des mêmes points.

Les projections ainsi trouvées ne donneront pas immédiatement la position du point de station sur la carte, ni sa hauteur, parce que le plan horizontal de projection n'est pas celui de la carte; mais il sera facile de la rapporter sur les véritables plans de projection.

101. *Sixième question*. Le général d'une armée en face de l'ennemi n'a pas la carte du pays occupé par celui-ci, et il en a besoin pour faire le plan d'une attaque qu'il médite. Il a un aérostat. Il charge un ingénieur de s'élever avec l'aérostat, et de prendre toutes les mesures nécessaires pour faire la carte et pour en donner un nivellement approché : mais il a lieu de croire que si l'aérostat changeait de station sur le terrain, l'ennemi s'apercevrait de son dessein; en conséquence il permet à l'ingénieur de s'élever à différentes hau-

teurs dans l'atmosphère, si cela est nécessaire; mais il lui défend de changer de station à terre. L'ingénieur est muni d'un instrument propre à mesurer les angles, et cet instrument est garni d'un fil-à-plomb : on demande comment l'ingénieur pourra exécuter les ordres du général?

Moyen de solution. L'ingénieur fera deux stations dans la même verticale, et il connaîtra leur distance en faisant mesurer la corde que l'on aura filée pour l'élever de l'une à l'autre. Dans l'une des stations, par exemple, dans celle qui est inférieure, il mesurera les angles que fait la verticale avec les rayons visuels dirigés aux points dont il veut déterminer la position sur la carte; puis, parmi tous ces points, il en choisira un qu'il regardera comme premier, et que nous nommerons A, et il mesurera de plus successivement les angles formés par le rayon visuel dirigé au point A, et ceux qui sont dirigés à tous les autres. Dans l'autre station, il mesurera les angles formés par la verticale, et les rayons visuels dirigés à tous les points du terrain. D'après ces observations, il sera en état de construire la carte demandée.

En effet, puisqu'on connaît les angles formés par la verticale, et les deux rayons visuels dirigés des deux stations au même point, ce point se trouve en même temps sur deux surfaces coniques déterminées et connues, car ces surfaces sont à bases circulaires; elles ont leurs axes dans la même verticale; la distance de leurs sommets est égale à la différence des hauteurs des deux stations, et les angles que leurs génératrices forment avec l'axe commun sont égaux aux angles observés. De plus, puisqu'on connaît l'angle formé par le rayon visuel dirigé de la première station à ce point, et par celui qui est dirigé au point A, le point que l'on considère sera donc encore sur une troisième surface conique à base circulaire, dont l'axe incliné sera le rayon visuel dirigé de la première station au point A, dont le sonnet sera à la première station, et dont l'angle formé par l'axe et la

génératrice sera égal à l'angle observé. Le point que on considère se trouvera donc en même temps sur des surfaces coniques (*) à bases circulaires connues de forme et de position; il sera donc au point de leur intersection commune; et en construisant les projections horizontale et verticale de cette intersection, on aura la position du point sur la carte, et son élévation au-dessus ou au-dessous des autres.

102. Sans changer de considérations, la construction peut devenir plus simple, au moyen de quelques-unes des méthodes que nous avons déjà exposées précédemment : car, connaissant les angles formés à la première station par le rayon visuel dirigé au point A, et par les rayons visuels dirigés à tous les autres points, et connaissant, pour chacun de ces angles, les angles que ces côtés forment avec la verticale, il sera facile de les réduire à l'horizon, c'est-à-dire de construire leurs projections horizontales. Si donc on prend sur la carte un point arbitraire pour représenter la projection de la verticale de l'aérostat, et si par ce point on mène une droite arbitraire, qui doive représenter la projection du rayon visuel dirigé au point A; enfin, si par le même point on mène des droites qui fassent, avec la projection du rayon dirigé au point A, des angles égaux aux angles réduits à l'horizon, il est évident que chacune de ces droites devra contenir la projection horizontale du point du terrain qui lui correspond. Il ne s'agira donc plus que de trouver la distance de ce point du terrain à la verticale. Or si, dans

(*) Deux de ces surfaces sont des cônes droits à base circulaire, qui ont pour sommet le point A, et qui se coupent nécessairement suivant deux droites On détermine un point de chacune de ces deux droites par l'intersection des deux cercles, en considérant les cônes comme des surfaces de révolution dont les axes se rencontrent (art. 83).



la projection verticale, et sur la projection de la verticale de l'aérostat, on prend deux points qui, en parties de l'échelle, soient distans l'un de l'autre d'une quantité égale à la distance mesurée des deux stations, et si par ces points on mène des droites qui fassent avec la verticale des angles egaux à ceux qui ont été observés par un même point du terrain, ces droites se couperont en un point dont la distance à la verticale sera la distance demandée. Portant donc cette distance sur le rayon correspondant, à partir de la projection de l'aérostat, on aura sur la carte la position du point du terrain. Les deux mêmes droites, dans la projection verticale, déterminent, par leur intersection, la hauteur du point du terrain; prenant donc sur la projection verticale les hauteurs de tous les points du terrain au-dessus d'un même plan horizontal, on déterminera les cotes qui conviendront à tous les points de la carte, et l'on aura le nivellement du terrain.

Cette construction est assez simple pour ne pas avoir besoin de figure.

La droite menée de la projection de la verticale de l'aérostat à celle du premier point A observé, ayant été tracée d'abord arbitrairement sur la carte, il s'ensuit que la carte n'est point orientée; ct, en effet, dans les observations que nous avons indiquées, il n'y a rien qui puisse déterminer la position des objets par rapport aux quatre points cardinaux de l'horizon. Mais si l'ingénieur observe à terre l'angle que fait avec la méridienne un rayon visuel horizontal dirigé du pied de la verticale à un des points placés sur la carte, et s'il rapporte cet angle sur sa projection, il aura la direction de la méridienne, et la carte sera orientée.

V.

103. Ce qne nous avons vu jusqu'à présent de la Geometrie descriptive, considérée d'une manière abstraite, contient les principales méthodes dont on pent avoir besoin dans les arts.

Si donc on avait établi dans toutes les villes un peu considérables des écoles secondaires, dans lesquelles les jeunes gens de l'âge de douze ans, et qui se destinent à la pratique de quelques-uns des arts, auraient été exercés pendant deux années aux constrnctions graphiques, et familiarisés avec les principaux phénomènes de la nature, dont la connaissance lenr est indispensable; ce qui, en développant lenr intelligence, et en leur donnant l'habitude et le sentiment de la précision, aurait contribué, de la manière la plus certaine, aux progrès de l'industrie nationale, et ce qui, en les accoutumant à l'évidence, les aurait garantis pour toujours de la séduction des imposteurs de tons les genres; et si nous ne nous proposions que de faire le livre élémentaire qni aurait dû servir de base à l'instruction de ces écoles secondaires, il faudrait terminer là les généralités, et passer immédiatement aux applications les plus utiles, et à celles dont l'usage est le plus fréquent. Mais nous ne devons pas écrire seulement pour les élèves des écoles secondaires, nous devons écrire pour leurs professeurs.

On ne doit faire entrer dans le plan d'nne instrnction populaire que des objets simples et d'une utilité journalière: mais, si un artiste rencontre une seule fois dans sa vie une difficulté dont il n'ait point été question dans les écoles, à qui s'adressera-t-il pour la lever, si ce n'est au professeur? et comment le professeur la levera-t-il, s'il ne s'est exercé a des considérations d'une généralité plus grande que celles qui forment l'objet ordinaire des études?

Pour donner aux professeurs la connaissance de quelques propriétés générales de l'étendue, et dont on peut avoir occasion de faire usage dans les arts, nous allons consacrer quelques leçons à l'examen de la courbure des courbes à double courbure, et de celles des surfaces courbes.

De la Courbure et des Développées des courbes à double courbure.

104. On sait que si une droite, considérée dans un plan, tourne autour d'un de ces points supposé fixe, tous les autres points de la droite décriront autour du point fixe des circonférences de cercles concentriques. Il n'y a aucune courbe qu'on ne puisse concevoir engendrée d'une manière analogue.

(Pl. 23, fig. 43.) Soit MNO une courbe quelconque tracée sur un plan : si l'on conçoit qu'une droite AB se meuve de manière qu'elle soit perpétuellement tangente à la courbe, et sans prendre de mouvement dans le sens de sa longueur, chaque point P de cette droite décrira une courbe GPP'P''H qui aura évidemment les propriétés suivantes.

Chaque élément PQ de la courbe décrite sera perpendiculaire à la direction correspondante de la droite AB ; car cet élément a la même direction qu'aurait en P l'élément d'un arc de cercle décrit du point M de contact, comme centre, et avec un rayon égal à PM. Ainsi la tangente en P de la courbe décrite sera perpendiculaire à la droite menée par le point P, tangente à la courbe donnée MNO.

Si le point décrivant P est placé du côté vers lequel la droite AB s'approche de la courbe touchée, la courbe GP se dirigera vers MNO jusqu'à ce qu'elle la rencontre ; ce qui arrivera lorsque le point décrivant sera devenu lui-même le point de contact de la droite AB, supposée transportée en CD : mais cette courbe ne se prolongera pas au-delà ; et si la droite continue son mouvement, le point P, et par

conséquent la courbe qu'il décrit, se réfléchira en P'. La courbe décrite étant toujours perpendiculaire à la droite mobile, les deux branches GPP' et P'P''H seront toutes deux perpendiculaires à la droite CD, et par conséquent à la courbe MNO que cette droite touche en P'. Ces deux branches se toucheront donc elles-mêmes en P'.

Le point P' dans lequel une courbe se réfléchit ainsi, de manière que ses deux branches se touchent à ce point, se nomme *point de rebroussement.*

La courbe MNP'O, sur laquelle s'appuie la droite en la touchant perpétuellement, s'appelle *la développée* de la courbe GPP'P''H, parce qu'un de ses arcs quelques MNP' est égal à la partie correspondante MP de la droite mobile, et la courbe GPP'P''H s'appelle *la développante* de la courbe MNO. Comme on peut avoir autant de courbes décrites de la même manière que l'on peut concevoir de points P, *p*, sur la droite AB, regardée comme indéfinie, il est évident qu'une même développée peut avoir une infinité de développantes différentes, telles que GPP'P''H, *gpp'p''h;* et toutes ces développantes ont la propriété d'avoir les mêmes normales. Nous verrons incessamment que réciproquement il n'y a pas de courbe qui n'ait une infinité de développées différentes.

105. On fait usage dans les arts de quelques développantes, et principalement de celle du cercle, qui est une spirale dont le nombre des révolutions est infini, et dont toutes les branches successives sont éloignées les unes des autres d'une quantité constante, égale à la circonférence du cercle développé. C'est suivant la courbure de cette développante que l'on coupe les cames ou dents des arbres tournans qui soulèvent des pilons, comme dans les bocards, parce que le contact de la came avec le mentonnet du pilon étant toujours dans la même verticale, l'effort de l'arbre pour soulever le pilon est constamment le même. Vaucanson em-

ployait souvent la spirale développante du cercle comme moyen d'engrenage pour transmettre le mouvement d'un arbre tournant à un autre arbre qui lui était parallèle, surtout lorsqu'il fallait que l'engrenage fût exact et transmît subitement, sans temps perdu, le mouvement d'un arbre à l'autre.

106. Nous avons fait voir (104) comment la développante peut être formée d'après la développée ; il est facile de concevoir comment, à son tour, la développée peut être formée d'après la développante. En effet, nous avons vu que toutes les normales de la développante sont tangentes à la développée. Si donc, par tous les points P, Q, d'une courbe proposée GPQP', on conçoit des normales, la courbe MNO, qui touchera toutes ces normales, sera la développée. De plus, si par deux points P, Q, consécutifs et infiniment proches, on conçoit deux normales PB, Q*b*, le point M où elles se couperont, pour se croiser au-delà, sera sur la développée ; et ce point pourra être regardé comme le centre d'un petit arc de cercle qui, étant décrit avec le rayon PM, aurait la même courbure que l'arc PQ de la courbe que l'on considère. Le rayon PM du cercle, dont la courbure est la même que celle de l'arc infiniment petit PQ d'une courbe, se nomme *le rayon de courbure* de cet arc ; le point M où se coupent les deux normales consécutives en est *le centre de courbure ;* et cette courbure est connue lorsque la position du point M est déterminée.

107. Jusqu'ici nous avons supposé que les courbes étaient planes, et nous n'avons considéré que ce qui se passe dans leur plan. Nous allons passer aux courbes à double courbure, telles que celles qui sont produites par l'intersection de deux surfaces courbes.

Si l'on conçoit une droite menée par le centre d'un cercle, perpendiculairement à son plan, et indéfiniment prolongée de part et d'autre, on sait que chacun des points

de cette droite sera à égales distances de tous les points de la circonférence, que par conséquent, si l'on imagine qu'une seconde droite, terminée d'une part à un des points de la circonférence, et de l'autre à un point quelconque de la perpendiculaire, tourne autour de cette dernière comme axe, en faisant constamment le même angle avec elle, son extrémité mobile décrira la circonférence du cercle avec la même exactitude que si l'on eût fait tourner le rayon autour du centre. La description du cercle au moyen du rayon, et qui n'est qu'un cas particulier de la première par sa simplicité, est plus propre à donner l'idée de l'étendue du cercle : mais, s'il ne s'agit que de description, la première peut, dans certain cas, avoir de l'avantage, parce qu'en prenant sur l'axe deux pôles placés de part et d'autre du plan du cercle, puis menant par ces deux points deux droites qui se couperaient en un point de la circonférence, et faisant ensuite mouvoir le système de ces deux droites autour de l'axe, de manière que leur point d'intersection fût fixe sur l'une et sur l'autre droite, ce point décrirait la circonférence du cercle, sans qu'il eût été nécessaire d'exécuter auparavant le plan dans lequel elle doit se trouver.

108. Soit K*Aa*D (pl. 23, fig. 44) une courbe à double courbure quelconque tracée dans l'espace. Par un point A de cette courbe soit conçu un plan MNPO perpendiculaire à la tangente en A; par le point *a* infiniment proche, soit pareillement imaginé un plan *mn*PO perpendiculaire à la tangente en *a*; ces deux plans se couperont en une droite OP qui sera l'axe du cercle, dont le petit arc A*a* de la courbe peut être censé faire partie : de manière que si, des points A, *a*, on abaisse deux perpendiculaires sur cette droite, ces perpendiculaires, égales entre elles, la rencontreront en un même point G qui sera le centre de ce cercle. Tous les autres points g, g', g''... de cette droite seront chacun à égales distances de tous les points de l'arc infiniment petit

Aa, et pourront par conséquent en être regardés comme les pôles. Ainsi, si d'un point quelconque g de cet axe on mène deux droites aux points A, a, ces droites gA, ga seront égales entre elles, et formeront avec l'axe des angles AgO, agO, égaux entre eux : en sorte que si l'on voulait définir la courbure de la courbe au point A, il faudrait donner la longueur du rayon de courbure AG, et que s'il s'agissait d'assigner le sens de la courbure, il faudrait donner la position du centre G dans l'espace. Mais s'il est simplement question de décrire le petit arc, il suffira également ou de faire tourner la droite Ag autour de l'axe, sans altérer l'angle AgO qu'elle fait avec lui, ou de faire tourner le rayon de courbure AG perpendiculairement à cet axe.

Ainsi la droite OP peut être regardée comme la ligne des pôles de l'élément Aa; le centre de courbure de cet élément est celui de ses pôles dont la distance à l'élément est un *minimum*, enfin son rayon de courbure est la perpendiculaire AG, abaissée de l'élément sur la ligne des pôles.

109. Que l'on fasse actuellement sur tous les points de la courbe à double courbure la même opération que l'on vient de faire sur un de ses élémens, c'est-à-dire que par tous les points consécutifs A, A', A'', A''', etc. (Pl. 23, fig. 45), l'on fasse passer des plans MNPO, perpendiculaires chacun à la tangente de la courbe au point où il la coupe ; le premier de ces plans rencontrera le second dans une droite OP qui sera le lieu géométrique des pôles de l'arc AA'; le second rencontrera le troisième dans une droite O'P', lieu des pôles de l'arc A'A'', et ainsi de suite. Il est évident que le système de toutes les droites d'intersection, ou la surface courbe qu'elles forment par leur assemblage, sera le lieu géométrique des pôles de la courbe KAD, car cette courbe n'aura point de pôle qui ne soit sur la surface, et cette surface n'aura pas de point qui ne soit le pôle de quelqu'un des élémens de la courbe.

110. Avant que d'aller plus loin, il est nécessaire d'exposer quelques propriétés dont jouissent les surfaces de ce genre, indépendamment de la courbe qui a servi à leur formation.

Ces surfaces peuvent se développer sur un plan sans rupture et sans duplicature. En effet, les élémens, tels que OPP'O', dont est composée la surface, sont des portions de plans infiniment étroites, et qui se joignent successivement par des lignes droites. On peut donc toujours concevoir que le premier de ces élémens OPP'O' tourne autour de O'P' comme charnière, jusqu'à ce qu'il soit dans le plan de l'élément suivant O'P'P"O"; qu'ensuite leur assemblage tourne autour de O"P", jusqu'à ce qu'il soit dans le plan du troisième, et ainsi de suite. D'où l'on voit que rien n'empêche que de cette manière tous les élémens de la surface ne viennent sans rupture se ranger dans un même plan.

De même que les plans normaux à la courbe KAD, par leurs intersections successives, forment une surface courbe à laquelle ils sont tous tangens, pareillement les lignes droites dans lesquelles ils se coupent, se rencontrent successivement dans des points qui forment une courbe à double courbure à laquelle toutes ces droites sont tangentes : car deux de ces droites consécutives sont les intersections d'un même plan normal, avec celui qui le précède, et avec celui qui le suit immédiatement. Ces deux droites sont donc dans un même plan; elles se coupent donc quelque part en un point, et la suite de tous ces points de rencontre forme une courbe remarquable sur la surface développable. En effet, les droites consécutives, après s'être croisées sur la courbe qui les touche toutes, se prolongent au-delà, et forment par leurs prolongemens une nappe de surface, distincte de la nappe formée par les parties des mêmes droites avant leurs rencontres. Ces deux nappes se joignent sur la courbe, qui est, par rapport à la surface entière, une véritable arête de rebroussement.

Actuellement, du point A (fig. 45) de la courbe, par lequel passe le premier plan normal MNPO, soit menée dans le plan, et suivant une direction arbitraire, une droite Ag jusqu'à ce qu'elle rencontre la section OP quelque part en un point g; par les points $A'g$, soit menée dans le second plan normal la droite $A'g$ prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la section O'P' en un point g', soit pareillement menée $A''g'g''$, et ainsi de suite. La courbe qui passe par tous les points g' g', g'', etc., est une développée de la courbe KAD; car toutes les droites Ag, $A'g'$, $A''g''$, sont les tangentes de la courbe $gg'g''$, puisqu'elles sont les prolongemens des élémens de cette courbe. De plus, si l'on conçoit que la première, Ag, tourne autour de OP, comme axe, pour venir s'appliquer sur la suivante, $A'g$, elle n'aura pas cessé d'être tangente à la courbe $gg'g''$; et son extrémité A, après avoir parcouru l'arc AA', se confondra avec l'extrémité A' de la seconde. Que l'on fasse de même tourner la seconde ligne, $A'g'$, autour de O'P', comme axe, pour qu'elle vienne s'appliquer sur la troisième, $A''g''$, elle ne cessera par de toucher la courbe $gg'g''$, et son extrémité A' ne sortira pas de l'arc A'A'', et ainsi de suite. Donc la courbe $gg'g''$ est telle, que si l'on conçoit qu'une de ses tangentes tourne autour de cette courbe sans cesser de lui être tangente, et sans avoir de mouvement dans le sens de sa longueur, un des points de cette tangente décrira la courbe KAD; donc elle est une de ses développées. Mais la direction de la première droite Ag était arbitraire, et suivant quelque autre direction qu'on l'eût menée dans le plan normal, on aurait trouvé une autre courbe $gg'g''$ qui aurait été pareillement une développée de la courbe KAD. Une courbe quelconque a donc une infinité de développées qui sont toutes comprise sur une même surface courbe.

Les droites $A'g'$ et $A''g'$ forment des angles égaux avec la droite O'P', et l'élément $g'g''$ étant le prolongement de la

droite $A''g'$, il s'ensuit que les deux élémens consécutifs gg', $g'g''$ de la développée $gg'g''$, forment des angles égaux avec la droite $O'P'$ qui passe par leur point de rencontre. Or, lorsqu'on développe la surface pour l'appliquer sur un plan, les élémens de la développée ne cessent pas de faire les mêmes angles avec les droites $O'P'$; donc deux élémens consécutifs de la courbe $gg'g''$, considérés dans la surface étendue sur un plan, forment des angles égaux avec une même ligne droite; donc ils sont dans le prolongement l'un de l'autre. Il suit de là que chacune des développées d'une courbe à double courbure devient une ligne droite lorsque la surface qui les contient toutes est étendue sur un plan; donc elle est sur cette surface la plus courte que l'on puisse mener entre ses extrémités.

On déduit de là un moyen facile d'obtenir une développée quelconque d'une courbe à double courbure, lorsqu'on a la surface développable qui les contient toutes. Pour cela, il suffit, par un point de la courbe, de mener un fil tangent à la surface, et de plier ensuite ce fil sur la surface en le tendant : car, en vertu de la tension, il prendra la direction de la courbe la plus courte entre ses extrémités; il se pliera par conséquent sur une des développées.

111. On conçoit, d'après cela, comment il est possible, d'engendrer, par un mouvement continu, une courbe quelconque à double courbure : car, après avoir exécuté la surface développable, touchée par tous les plans normaux de la courbe, si, du point donné dans l'espace, et par lequel la courbe doit passer, on dirige deux fils tangens à cette surface; et si, après les avoir pliés ensuite sur la surface en les tendant, on les fixe par leurs autres extrémités, le point de réunion des deux fils qui aura la faculté de se mouvoir avec le plan tangent à la surface, sans glisser ni sur l'un des fils ni sur l'autre, engendrera, dans son mouvement, la courbe proposée.

112. Tout ce nous venons de dire par rapport aux courbes à double courbure convient également aux courbes planes, avec cette différence seulement, que tous les plans normaux étant perpendiculaires au plan de la courbe, toutes les droites de leurs intersections consécutives sont aussi perpendiculaires au même plan, et par conséquent parallèles entre elles. La surface développable, touchée par tous ces plans normaux, est donc alors une surface cylindrique, dont la section perpendiculaire est la développée ordinaire de la courbe. Mais cette surface cylindrique contient de même toutes les développées à double courbure de la même courbe; et chacune de ces développées fait, avec toutes les droites génératrices de la surface cylindrique, des angles constans. Le filet d'une vis ordinaire est une des développées de la développante du cercle qui sert de base à la surface cylindrique sur laquelle il se trouve; et quelle que soit la hauteur du pas de la vis, si le diamètre du cylindre ne change pas, le filet sera toujours une des développées de la même courbe.

113. Après avoir exposé la théorie des courbes à double courbure, nous allons nous occuper des surfaces courbes. Cet objet est de nature à être traité avec beaucoup plus de facilité par le secours de l'Analyse que par la simple contemplation des propriétés de l'étendue : mais les résultats auxquels il conduit peuvent être utiles à des artistes que nous ne devons pas supposer familiarisés avec les opérations analytiques; nous allons donc essayer de les présenter en n'employant que des considérations géométriques. Cette méthode introduira la clarté qui lui est particulière, mais aussi elle apportera de la lenteur dans la marche.

Les surfaces, par rapport à leurs courbures, peuvent être divisées en trois grandes classes. La première comprend celles qui dans tous leurs points n'ont aucune courbure; les surfaces de ce genre se réduisent au plan, qui d'ailleurs

peut être placé d'une manière quelconque dans l'espace. La seconde classe renferme toutes celles qui, dans chacun de leurs points, n'ont qu'une seule courbure; ce sont, en général, les surfaces développables, dont deux élémens consécutifs peuvent être regardés comme faisant partie d'une surface conique, même en regardant la grandeur de ces élémens comme indéfinie dans le sens de la génératrice de la surface conique. Enfin, toutes les autres surfaces courbes composent la troisième classe; dans chacun de leurs points, elles ont deux courbures distinctes et qui peuvent varier l'une indépendamment de l'autre. Commençons par considérer les surfaces courbes les plus simples, et d'abord les surfaces cylindriques.

114. Soit ABFE (pl. 24 fig. 46) une surface cylindrique indéfinie à base quelconque, sur laquelle on considère un point L pris arbitrairement. Par ce point concevons la droite génératrice CLG, et une section JLK faite par un plan perpendiculaire à la génératrice; cette section sera parallèle et semblable à la base de la surface. Enfin, par le point L concevons à la surface la normale LP; cette normale sera perpendiculaire à la génératrice CG, et par conséquent dans le plan de la section JLK; de plus elle sera perpendiculaire à la tangente de la section au point L; ou, ce qui comprend à la fois les deux conditions, elle sera perpendiculaire au plan tangent à la surface en L. Cela posé, si l'on prend sur la surface deux autres points infiniment voisins du point L, l'un M sur la génératrice CG, l'autre N sur la section perpendiculaire, et si par chacun de ces points on mène une nouvelle normale à la surface, ces deux normales MQ, NP seront chacune dans un même plan avec la première normale LP; mais ces plans seront différens pour les deux dernières normales. En effet, le plan tangent à la surface en L étant aussi tangent en M, les deux droites LP et MQ sont perpendiculaires au même plan;

elles sont donc parallèles entre elles, et par conséquent dans un même plan. Ces droites parallèles peuvent être regardées comme concourant à l'infini. Quant aux normales LP, NP, elles sont évidemment comprises dans le plan de la section perpendiculaire ; elles concourent donc en un certain point P de ce plan : ainsi les deux plans qui contiennent les trois normales deux à deux sont, non-seulement différens, mais perpendiculaires à l'autre.

115. Actuellement quelque autre point O que l'on prenne sur la surface, infiniment voisin du premier point L, si par ce point on conçoit à la surface une normale OQ, cette normale ne sera pas dans un même plan avec la première normale LP, et par conséquent ne pourra la rencontrer : car si par le point O l'on conçoit une nouvelle section *iOk* perpendiculaire à la surface, et qui coupe quelque part en un point M la droite génératrice qui passe par le point L, la normale OQ sera dans le plan de cette section. Les deux normales LP et OQ seront donc dans deux plans parallèles, et ne pourront être elles-mêmes dans un même plan, à moins qu'elles ne soient parallèles entre elles : or, elles ne sont point parallèles. En effet, si l'on conçoit la normale au point M, nous avons vu que cette normale MQ sera parallèle à LP ; mais elle ne sera pas parallèle à OQ : donc les normales LP et OQ ne sont point parallèles entre elles ; donc elles ne sont pas dans un même plan ; donc elles ne peuvent jamais se rencontrer.

116. On voit donc que si, après avoir mené, par un point quelconque d'une surface cylindrique, une normale à la surface, on veut passer à un point infiniment voisin pour lequel la nouvelle normale soit dans un même plan avec la précédente, et puisse la rencontrer même à l'infini, si cela est nécessaire, on ne peut le faire que dans deux sens différens : 1° en suivant la direction de la droite génératrice de la surface, et alors la nouvelle normale rencontre

la première à l'infini; 2° en suivant la section perpendiculaire à la surface, et alors la nouvelle normale rencontre la première en un point dont la distance dépend de la courbure de la base dans le point correspondant; enfin, que ces deux directions sont entre elles à angles droits sur la surface.

Les deux points de rencontre des trois normales sont donc les seuls *centres de courbures* possibles de l'élément que l'on considère sur la surface; les deux plans différens qui passent par la première normale et par chacune des deux autres indiquent le sens de chacune de ces courbures; les distances du point de la surface aux deux points de rencontre des normales sont *les rayons des deux courbures*; et l'on voit que, dans les surfaces cylindriques, un de ces rayons étant toujours infini, tandis que la grandeur de l'autre dépend de la nature de la base de la surface, pour chacun des points, il n'y a qu'une courbure finie; l'autre est toujours infiniment petite ou nulle.

Ce que nous venons de dire peut s'appliquer facilement à toutes les surfaces développables, dont deux élémens consécutifs, même indéfinis dans le sens de la direction de la droite génératrice, peuvent toujours être considérés comme faisant partie d'une certaine surface cylindrique. Passons maintenant au cas général des surfaces courbes quelconques.

117. Soit ABCD (pl. 24, fig. 47) une surface courbe quelconque, sur laquelle on considère un point L pris à volonté, et par ce point soit conçue une droite FL*f* tangente à la surface : la position de cette droite ne sera pas déterminée; elle pourra être menée d'une manière quelconque dans le plan tangent à la surface au point L. Puis concevons que la droite F*f* se meuve de manière qu'elle soit toujours parallèle à elle-même, et qu'elle soit toujours tangente à la surface courbe; elle engendrera par son mouvement une certaine surface cylindrique E*eg*G, dont la base dépendra

de la forme de la surface courbe, et qui touchera cette surface dans une courbe LCKAL, engendrée elle-même par le mouvement du point de contact de la droite génératrice avec la surface proposée. Cette courbe de contact LCKAL est en général à double courbure.

118. Dans le cas très particulier de la surface courbe du second degré, c'est-à-dire de la surface qui, étant coupée par un plan quelconque, produit toujours une section conique, la ligne de contact avec une surface cylindrique qui l'enveloppe est toujours une courbe plane, quelle que soit d'ailleurs la direction de la génératrice de la surface cylindrique.

119. Dans le cas un peu plus général où la surface courbe est engendrée par le mouvement d'une ligne courbe plane, fixe dans son plan, mais mobile avec lui, lorsqu'il roule sur deux surfaces courbes données, pour chaque point de la surface il existe une direction à donner à la droite génératrice, pour que la surface cylindrique engendrée par le mouvement de cette droite touche la surface courbe dans une courbe plane; et cette direction doit être telle, que la droite soit toujours perpendiculaire au plan mobile, lorsqu'il passe par le point que l'on considère. Les surfaces de révolution en sont un cas particulier. En effet, si par un point quelconque d'une surface de révolution on conçoit une droite tangente à la surface, et perpendiculaire au plan du méridien qui passe par ce point, et si l'on suppose que cette droite se meuve de manière qu'elle soit toujours tangente à la surface, et perpendiculaire au plan du même méridien, le point de contact de la ligne avec la surface parcourra la circonférence du méridien, et la droite engendrera une surface cylindrique que touchera la surface de révolution dans la circonférence même du méridien, et par conséquent dans une courbe plane.

120. Pour tout autre cas, une surface cylindrique cir-

conscrite à une surface quelconque touche cette surface dans une courbe LCKAL qui est à doublo courbure.

La droite FL*f* ayant d'abord été menée d'une manière ar. bitraire dans le plan tangent à la surface au point L, si par ce point on conçoit la tangente LU à la courbe de contact LCKAL, cette tangente fera, avec la ligne droite génératrice FL*f*, un augle FLU qui dépendra et de la nature de la surface courbe et de la direction arbitraire donnée à la droite FL*f*, Concevous, ce qui est toujours possible dans chaque cas particulier, que la direction de la droite FL*f* change, sans que cette droite cesse d'être tangente à la surface au point L, et que d'après cette nouvelle direction, elle se meuve parallèlemeut à elle-même en touchant toujours la surface; elle eugendrera par sou mouvement une autre surface cylindrique circonscrite à la surface, qui la touchera dans une autre ligue de contact à double courbure; cette nouvelle courbe de contact passera encore par le point L, et sa tangeute en ce point ferá, avec la nouvelle direction de la droite génératrice, un angle difféıeut du premier angle FLU. Concevons enfiu qu'on ait ainsi fait varier la direction do la droite génératrice, jusqu'à ce que la surface cylindrique engendrée par cette droite touche la surface dans une courbe de contact dont la tangente eň L soit perpendiculaire à la droite génératrico.

Cela posé, soit (pl. 24, fig. 48) une surface courbe quelconque, sur laquelle on considère d'abord un certain point L; soit FLJ la droite tangente à la surface en L, dont la direction soit prise de manière que, si on la fait mouvoir parallèlemeut à elle-même, et saus qu'elle cesse de toucher la surface, elle engendre une surface cylindrique EFGHJK, qui touche la surface eu une courbe dont la tangente eu L soit perpendiculaire à FLJ. La ligne de contact de la surface cylindrique aveo la surface proposée sera une courbe à double courbure; mais au point L son élément se cou-

fondra avec l'élément LN de la section CNLD faite dans la surface cylindrique par un plan perpendiculaire à la droite génératrice FLJ. Les deux extrémités L, N de cet élément, se trouvant sur la ligne de contact, seront en même temps sur les deux surfaces, et si par ces points L, N on mène deux normales LP, NP à la surface cylindrique, elles seront aussi normales à la courbe. Or ces deux normales sont dans le même plan perpendiculaire à la génératrice de la surface cylindrique, et doivent se rencontrer quelque part en un point P, qui est le centre de courbure de l'arc LN; donc si sur une surface courbe quelconque on prend deux points L, N, qui soient placés sur la ligne de contact de cette surface avec la surface cylindrique dont la droite génératrice soit perpendiculaire à l'élément LN de cette ligne de contact, les normales à la surface courbe, menées par ces deux points, seront dans un même plan, et se rencontreront en un point qui sera le centre de la courbure de la surface, dans le sens du plan qui contient les deux normales.

121. Si sur la droite FLJ on prend un point *m* infiniment proche du point L, et si par ce point *m* on conçoit une normale à la surface cylindrique, cette normale sera parallèle à LP, et ne sera pas normale à la surface courbe. Mais si l'on conçoit que dans le plan de la courbe ALMB, déterminé par les droites FLJ et LP, la droite FLJ se meuve sans cesser de toucher la surface, et prenne la position infiniment voisine *fi*, de manière qu'elle touche la surface dans un point M, infiniment voisin du point L, et si l'on suppose que cette droite *f*M*i* se meuve parallèlement à elle-même en touchant toujours la surface, elle engendrera une nouvelle surface cylindrique *efghik*, infiniment peu différente de la première, tant pour la forme que pour la position, et la ligne de contact de cette nouvelle surface cylindrique passera par le point M. La normale MQ à cette surface

cylindrique, au point M, sera aussi normale à la surface courbe; elle sera dans un même plan avec la première normale LP, puisqu'elles seront toutes deux dans le plan déterminé par les droites FLJ, *fMi*; et ce plan sera perpendiculaire à celui qui passe par les normales LP, NP. Les deux normales LP et MQ se rencontreront donc en un certain point R, qui sera le centre de courbure de l'arc LM, et par conséquent le centre de la courbure de la surface dans le sens du plan qui passe par les droites FLJ, et *fMi*.

On voit donc que si, considérant sur une surface courbe quelconque un point quelconque L, on conçoit une normale à la surface en ce point, on peut toujours passer, suivant deux directions différentes, à un autre point M ou N, pour leqnel la nouvelle normale soit dans un même plan avec la première, et que ces deux directions étant dans des plans normaux rectangulaires entre eux, elles sont elles-mêmes à angles droits sur la surface courbe.

122. Actuellement ces deux directions sont en général les seules pour lesquelles cet effet puisse avoir lieu; c'est-à-dire que si sur la surface courbe on passe dans toute autre direction à un point O, infiniment voisin du point L, et que si par ce point on mène à la surface la normale OQ, cette normale ne sera pas dans un même plan avec la normale LP, et ne pourra par conséquent la rencontrer.

En effet, concevons que la seconde surface cylindrique ait été inclinée de telle manière, que sa ligne de contact avec la surface passe par le point O; l'arc OM de cette ligne de contact se confondra avec l'arc de la section C'OMD' perpendiculaire à la surface cylindrique; les deux normales en O et en M à la surface seront aussi normales à la surface cylindrique; elles seront dans le plan de la section perpendiculaire; elles se rencontreront quelque part en un point Q : mais la normale OQ ne rencontrera pas la normale LP; car pour que ces deux normales se rencontras-

sent, il faudrait qne le point Q de la normale coïncidât avec le point R, dans lequel cette normale rencontre LP, ce qui en général n'arrive pas, parce que cela suppose une égalité entre les courbures des deux arcs LM et LN, et ce qui ne peut avoir lieu quc pour certains points de quelques surfaces conrbes. Par exemple, la courbure de la surface de la sphère étant la même dans tous les sens, suivant quelqne direction que l'on passe d'un de ses points à un autre infiniment proche, les normales menées par ces deux points sont toujours dans un même plan; ct cette surface est la seule pour laquelle cette propriété convienne à tous les points. Dans les surfaces de révolution pour lesqnelles la courbe génératrice coupe l'axe perpendiculairement, la courbure au sommet est encore la même dans tous les sens, et deux normales consécutives sont toujours dans un même plan; mais cette propriété n'a lieu que pour le sommet. Enfin, il existe des surfaces courbes dans lesquelles cette propriété a lieu pour une suite de points qui forment nne certaine conrbe sur la surface : mais cela n'arrive que pour les points de cette courbe; et pour tous les autres points de la surface, la nouvelle normale ne peut rencontrer la première, à moins que le point de la surface par lequel elle passe ne soit pris suivaut l'une des deux directions que nous avons définies.

123. Il suit de là qu'en général une surface quelconque n'a dans chacun de ces points que deux courbures; que chacune de ces courbures a son centre particulier, son rayon particulier, et que les deux arcs sur lesquels se prennent ces deux courbures sont à angles droits sur la surface. Les cas particuliers ponr lesquels, comme dans la sphère et dans les sommets de surfaces de révolution, deux normales consécutives quelconques se rencontrent, ne sont pas une exception à cette proposition; il résulte seulement que, pour ce cas, les deux courbnres sont égales entre

elles, et que les directions suivant lesquelles on doit les estimer sont indifférentes.

124. Quoique les deux courbures d'une surface courbe soient assujetties l'une à l'autre par la loi de la génération de la snrface, elles éprouvent d'un point de la surface à l'autre des variations qui peuvent être dans le même sens ou dans des sens contraires. Nous ne pouvons pas entrer, à cet égard, dans de très grands détails, qui deviendraient beaucoup moins pénibles par le secours de l'Analyse ; nous nous contenterons d'observer que, ponr certaines surfaces, telles que les sphéroïdes, dans chaque point les deux courbures sont dans le même sens, c'est à-dire qu'elles tournent leurs convexités du même côté; que pour quelques autres surfaces, dans certains points, les deux courbnres sont dans des sens opposés, c'est-à-dire que l'une présente sa concavité et l'autre sa convexité du même côté (la surface de la gorge d'une poulie est dans ce cas) ; que pour quelques autres surfaces, dans tous les points, les deux courbures sont dans des sens opposés (la surface engendrée par le mouvement d'une ligne droite, assujettie à conper toujours trois autres droites données arbitrairement dans l'espace, est dans ce cas) ; enfin que, dans une surface particulière, ces deux courbures opposées sont, ponr chaque point, égales entre elles. Cette surface est celle dont l'aire est un *minimum*.

125. Passons maintenant à quelques conséquences qni suivent des deux conrbures d'une surface courbe, et qu'il est important de faire connaître aux artistes.

Soit (pl. 24, fig. 49) une portion de snrface courbe quelconque, snr laquelle nous considérions un point L pris arbitrairement, et soit conçne la normale à la surface en L. Nous venons de voir que l'on peut passer snivant deux directions différentes du point L à un autre M ou L', ponr lequel la nouvelle normale rencontre la première, et que ces deux directions sont à angles droits sur la surface. Soient

donc LM et LL′ ces deux directions rectangulaires en L. Du point M on pourra de même passer dans deux directions différentes à un autre point N ou M′, pour lequel la normale rencontre la normale en M; et soient MN, MM′ ces deux directions rectangulaires en M. En opérant de même pour le point N, on trouvera les deux directions NO et NN′ rectangulaires en N; pour le point O, l'on aura les deux directions OP, OO′, et ainsi de suite. La série des points L, M, N, O, P, etc., pour lesquels deux normales consécutives sont toujours dans un plan, formera sur la surface courbe une ligne courbe qui indiquera perpétuellement le sens d'une des deux courbures de la surface, et cette courbe sera une ligne de première courbure, qui passera par le point L. Si l'on opère pour le point L′ comme on l'a fait pour le point L, on pourra d'abord passer, suivant deux directions rectangulaires, à un nouveau point M′ ou L″, pour lequel la nouvelle normale rencontre la normale en L′, et l'on trouvera de même une nouvelle série de points L′, M′, N′, O′, P′, etc., qui formeront sur la surface courbe une autre ligne de première courbure, qui passera par le point L′. En opérant de même pour la suite des points L″, L‴, L⁗...., trouvés comme L′, L″, on aura de nouvelles lignes de première courbure L″M″N″O″P″, L‴M‴N‴O‴P‴, etc, qui passeront par les points respectifs L″, L‴, L⁗, etc., et qui diviseront la surface en zones. Mais la suite des points L, L′, L″, L‴, etc., pour lesquels deux normales consécutives sont encore dans un plan, formera sur la surface courbe une autre courbe qui indiquera perpétuellement le sens de l'autre courbure de la surface, et cette courbe sera la ligne de seconde courbure; M, M′, M″, M‴, etc., formera une autre ligne de seconde courbure, qui passera par le point M; la série des points N, N′, N″, N‴, etc., formera une nouvelle ligne de seconde courbure qui passera par le point N, et ainsi de suite, et toutes les lignes de seconde

courbure diviseront la surface courbe en d'autres zones. Enfin, toutes les lignes de première courbure couperont à angles droits toutes les lignes de seconde courbure, et ces deux systèmes de lignes courbes diviseront la surface en élémens rectangulaires ; et cet effet aura lieu, non-seulement si ces lignes sont infiniment proches, comme nous l'avons supposé, mais même quand celles d'un même système seraient à des distances finies les unes des autres. Avant que d'aller plus loin, nous allons en apporter un exemple avec lequel on est déjà familiarisé.

126. Si l'on coupe une surface quelconque de révolution par une suite de plans menés par l'axe, on aura une suite de sections qui seront les lignes d'une des courbures de la surface ; car pour qu'une courbe soit ligne de courbure d'une surface, il faut qu'en chacun de ces points, l'élément de surface cylindrique qui toucherait la surface dans l'élément de la courbe ait sa droite génératrice perpendiculaire à la courbe ; or cette condition a évidemment lieu ici, non-seulement en chaque point de la courbe pour un élément de surface cylindrique particulière, ce qui serait suffisant, mais même par rapport à toute la courbe pour une même surface cylindrique. De plus, si l'on coupe la même surface de révolution par une suite de plans perpendiculaires à l'axe, on aura une seconde suite de sections qui seront toutes circulaires, et qui seront les lignes de l'autre courbure ; car si par un point quelconque d'une de ces sections, on conçoit la tangente au méridien de la surface, et si l'on suppose que cette tangente se meuve parallèlement à elle-même pour engendrer l'élément d'une surface cylindrique tangent à la surface de révolution, l'élément de la surface cylindrique touchera cette surface dans l'arc de cercle, et cet arc sera perpendiculaire à la droite génératrice. Ainsi, sur une surface quelconque de révolution, les lignes de courbure sont, pour une espèce de courbure, les méridiens

de la surface, et pour l'autre courbure, les parallèles; et il est évident que ces deux suites de courbes se coupent toutes à angles droits sur la surface.

127. Si par tous les points d'une des lignes de courbure LMNOP (pl. 24, fig. 49) d'une surface courbe on conçoit des normales à la surface, nous avons vu que la seconde normale rencontrera la première en un certain point; que la troisième rencontrera la seconde en un autre point, et ainsi de suite; le système de ces normales, dont deux consécutives sont toujours dans un même plan, forme donc une surface développable qui est partout perpendiculaire à la surface proposée, et qui la coupe suivant la ligne de courbure. Cette ligne de courbure étant elle-même partout perpendiculaire aux normales qui composent la surface développable, est aussi une ligne de courbure de cette dernière surface. L'arète de rebroussement de la surface développable, arète qui est formée par la suite des points de rencontre des normales consécutives, et à laquelle toutes les normales sont tangentes, est une des développées de la courbe LMNOP; elle est le lieu des centres de courbure de tous les points de cette courbe, et elle est aussi celui des centres d'une des courbures de la surface pour les points qui sont sur la ligne LMNOP. Si l'on fait la même observation pour toutes les autres lignes de courbure de la même suite, telles que L'M'N'O'P', L"M"N"O"P", etc., toutes les normales de la surface courbe pourront être regardées comme composant une suite de surfaces développables, toutes perpendiculaires à cette surface, et le système des arètes de rebroussement de toutes les surfaces développables formera une surface courbe qui sera le lieu de tous les centres d'une des courbures de la surface proposée.

Ce que nous venons de remarquer pour une des deux courbures de la surface, a également lieu pour l'autre. En effet, si par tous les points L, L', L", L‴, etc., d'une des lignes

de l'autre courbure, on conçoit des normales à la surface, ces droites seront consécutivement deux à deux dans un même plan; leur système formera une surface développable, qui sera partout perpendiculaire à la surface proposée, et qui la rencontrera dans la ligne de courbure LL'L''L'''...., qui sera elle-même une ligne de courbure de la surface développable. L'arête de rebroussement de cette dernière surface sera le lieu des centres de courbure de la ligne LL'L''L'''...., et en même temps celui des centres de seconde courbure de la surface proposée, pour tous les points de la ligne LL'L''L'''.... Il en sera de même pour toutes les normales menées par les points des autres lignes de courbure MM'M''M'''...., NN'N''N'''..... En sorte que toutes les normales de la surface courbe proposée pourront être regardées de nouveau comme composant une seconde suite de surfaces développables, toutes perpendiculaires à cette surface, et le système des arêtes de rebroussement de toutes les nouvelles surfaces développables formera une seconde surface courbe, qui sera le lieu des centres de la seconde courbure de la première.

128. Dans quelques cas particuliers, les surfaces des centres des deux courbures d'une même surface courbe sont distinctes, c'est-à-dire qu'elles peuvent être engendrées séparément, ou qu'elles ont leurs équations séparées. On en a un exemple dans les surfaces de révolution, pour lesquelles une de ces surfaces se réduit à l'axe même de rotation, et pour lesquelles l'autre est une autre surface de révolution engendrée par la rotation de la développée plane du méridien autour du même axe. Mais le plus souvent, et dans le cas général, ces deux surfaces ne sont point distinctes, elles ne peuvent être engendrées séparément; elles ont la même équation, et elles sont deux nappes différentes d'une même surface courbe.

129. On voit donc que toutes les normales d'une surface

courbe peuvent être considérées comme les intersections de deux suites de surfaces développables telles, que chacune des surfaces développables rencontre perpendiculairement la surface proposée, et la coupe suivant une courbe qui est en même temps ligne de courbure de cette surface et ligne de courbure de la surface développable, et que chacue des surfaces développables de la première suite coupe toutes celles de la seconde suite en ligne droite et à angles droits.

130. Voyons actuellement quelques exemples de l'utilité dont ces généralités peuvent être dans certains arts. Le premier exemple sera pris dans l'Architecture.

Les voûtes constrnites en pierre de taille sont composées de pièces distinctes auxquelles on donne le nom générique de *voussoirs*. Chaque voussoir a plusieurs faces qui exigent la plus grande attention dans l'exécution : 1° la face qui doit faire parement, et qui, devant être une partie de la surface visible de la voûte, doit être exécutée avec la plus grande précision; cette face se nomme *douelle;* 2° les faces par lesquelles les voussoirs consécutifs s'appliquent les uns contre les autres; on les nomme généralement *joints*. Les joints exigent aussi la plus grande exactitude dans leur exécution; car la pression se transmettant d'nn voussoir à l'autre perpendiculairement à la surface du joint, il est nécessaire que les deux pierres se touchent par le plus grand nombre possible de points, afin que, pour chaque point de contact, la pression soit la moindre, et que pour tous elle approche le plus de l'égalité. Il faut donc que dans chaque voussoir les joints approchent le plus de la véritable surface dont ils doivent faire partie; et pour que cet objet soit plus facile à remplir, il faut que la surface des joints soit de la nature la plus simple et de l'exécution la plus susceptible de précision. C'est pour cela que l'on fait ordinairement les joints plans, mais les surfaces de toutes les voûtes ne

comportent pas cette disposition, et dans quelques-unes on blesserait trop les convenances dont nous parlerons dans un moment, si l'on ne donnait pas aux joints une surface courbe. Dans ce cas, il faut choisir parmi toutes les surfaces courbes qui pourraient d'ailleurs satisfaire aux autres conditions, celles dont la génération est la plus simple et dont l'exécution est plus susceptible d'exactitude. Or, de toutes les surfaces courbes, celles qu'il est plus facile d'exécuter sont celles qui sont engendrées par le mouvement d'une ligne droite, et surtout les surfaces développables; ainsi, lorsqu'il est nécessaire que les joints des voussoirs soient des surfaces courbes, on les compose, autant qu'il est possible, de surfaces développables.

Une des principales conditions auxquelles la forme des joints des voussoirs doit satisfaire, c'est d'être partout perpendiculaires à la surface de la voûte que ces voussoirs composent : car, si les deux angles qu'un même joint fait avec la surface de la voûte étaient sensiblement inégaux, celui de ces angles qui excéderait l'angle droit serait capable d'une plus grande résistance que l'autre; et dans l'action que deux voussoirs consécutifs exercent l'un sur l'autre, l'angle plus petit que l'angle droit serait exposé à éclater, ce qui, au moins, déformerait la voûte, et pourrait même altérer sa solidité, et diminuer la durée de l'édifice. Lors donc que la surface d'un joint doit être courbe, il convient de l'engendrer par une droite qui soit partout perpendiculaire à la surface de la voûte; et si l'on veut de plus que la surface du joint soit développable, il faut que toutes les normales à la surface de la voûte, et qui composent, pour ainsi dire, le joint, soient consécutivement deux à deux dans un même plan. Or, nous venons de voir que cette condition ne peut être remplie, à moins que toutes les normales ne passent par une même ligne de courbure de la surface de la voûte; donc, si les surfaces des joints des voussoirs d'une voûte

doivent être développables, il faut nécessairement que ces surfaces rencontrent celle de la voûte dans ses lignes de courbure.

D'ailleurs, avec quelque précision que les voussoirs d'une voûte soient exécutés, leur division est toujours apparente sur la surface ; elle y trace des lignes très sensibles et ces lignes doivent être soumises à des lois générales, et satisfaire à des convenances particulières, selon la nature de la surface de la voûte. Parmi les lois générales, les unes sont relatives à la stabilité, les autres à la durée de l'édifice; de ce nombre est la règle qui prescrit que les joints d'un même voussoir soient rectangulaires entre eux, par la même raison qu'ils doivent être eux-mêmes perpendiculaires à la surface de la voûte. Aussi les lignes de division des voussoirs doivent être telles, que celles qui divisent la voûte en assises soient toutes perpendiculaires à celles qui divisent une même assise en voussoirs. Quant aux convenances particulières, il y en a de plusieurs sortes, et notre objet n'est pas ici d'en faire l'énumération ; mais il y en a une principale, c'est que les lignes de division des voussoirs qui, comme nous venons de le voir, sont de deux espèces, et qui doivent se rencontrer toutes perpendiculairement, doivent aussi porter le caractère de la surface à laquelle elles appartiennent. Or, il n'existe pas de ligne sur la surface courbe qui puisse remplir en même temps toutes ces conditions, que les deux suites de ligne de courbures, et elles les remplissent complètement. Ainsi la division d'une voûte en voussoirs doit donc toujours être faite par des lignes de courbure de la surface de la voûte, et les joints doivent être des portions de surfaces développables formées par la suite des normales à la surface qui, considérés consécutivement, sont deux à deux dans un même plan ; en sorte que, pour chaque voussoir, les surfaces des quatre joints et celle de la voûte soient toutes rectangulaires.

Avant la découverte des considérations géométriques sur lesquelles tout ce que nous venons de dire est fondé, les artistes avaient un sentiment confus des lois auxquelles elles conduisent, et, dans tous les cas, ils avaient coutume de s'y conformer. Ainsi, par exemple, lorsque la surface de la voûte était de révolution, soit qu'elle fût en sphéroïde, soit qu'elle fût en berceau tournant, ils divisaient ses voussoirs par des méridiens et par des parallèles, c'est-à-dire par les lignes de courbure de la surface de la voûte.

Les joints qui correspondaient aux méridiens étaient des plans menés par l'axe de révolution; ceux qui correspondaient aux parallèles étaient des surfaces coniques de révolution autour du même axe; et ces deux espèces de joints étaient rectangulaires entre eux, et perpendiculaires à la surface de la voûte. Mais lorsque les surfaces des voûtes n'avaient pas une génération aussi simple, et quand leurs lignes de courbure ne se présentaient pas d'une manière aussi marquée, comme dans les voûtes sphéroïdes alongées, et dans un grand nombre d'autres, les artistes ne pouvaient plus satisfaire à toutes les convenances, et ils sacrifiaient, dans chaque cas particulier, celles qui leur présentaient les difficultés les plus grandes.

Il serait donc convenable que, dans chacune des écoles de Géométrie descriptive établies dans les départemens, le professeur s'occupât de la détermination et de la construction des lignes de courbure des surfaces employées ordinairement dans les arts, afin que, dans le besoin, les artistes, qui ne peuvent pas consacrer beaucoup de temps à de semblables recherches, pussent les consulter avec fruit, et profiter de leurs résultats.

131. Le second exemple que nous rapporterons sera pris dans l'art de la gravure.

Dans la gravure, les teintes des différentes parties de la surface des objets représentés sont exprimées par des ha-

chures que l'on fait d'autant plus fortes ou d'autant plus rapprochées, que la teinte doit être plus obscure.

Lorsque la distance à laquelle la gravure doit être vue est assez grande pour que les traits individuels de la hachure ne soient pas aperçus, le genre de la hachure est à peu près indifférent, et, quel que soit le contour de ses traits, l'artiste peut toujours les forcer et les multiplier de manière à obtenir la teinte qu'il désire et à produire l'effet demandé. Mais, et c'est le cas le plus ordinaire, quand la gravure est destinée à être vue d'assez près pour que les contours des traits de la hachure soient aperçus, la forme de ces contours n'est plus indifférente. Pour chaque objet, et pour chaque partie de la surface d'un objet, il y a des contours de hachures plus propres que tous les autres à donner une idée de la courbure de la surface; ces contours particuliers sont toujours au nombre de deux, et quelquefois les graveurs les emploient tous deux à la fois, lorsque, pour forcer plus facilement leurs teintes, ils croisent les hachures. Ces contours, dont les artistes n'ont encore qu'un sentiment confus, sont les projections des lignes de courbure de la surface qu'ils veulent exprimer. Comme les surfaces de la plupart des objets ne sont pas susceptibles de définition rigoureuse, leurs lignes de courbure ne sont pas de nature à être déterminées, ni par le calcul, ni par des constructions graphiques. Mais si, dans leur jeune âge, les artistes avaient été exercés à rechercher les lignes de courbure d'un grand nombre de surfaces différentes, susceptibles de définition exacte, ils seraient plus sensibles à la forme de ces lignes et à leur position, même pour les objets moins déterminés; ils les saisiraient avec plus de précision, et leurs ouvrages auraient plus d'expression.

Nous n'insisterons pas sur cet objet, qui ne présente peut-être que le moindre des avantages que les arts et l'industrie retireraient de l'établissement d'une école de Géométrie descriptive dans chacune des principales villes de France.

THÉORIE DES OMBRES

ET

DE LA PERSPECTIVE.

(*Extrait des Leçons inédites de* M. Monge, *par* M. Brisson, *Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.*)

132. Après avoir exposé les principes généraux à l'aide desquels ou résout les différentes questions qu'embrasse la Géométrie descriptive, il est convenable d'en faire connaître quelques applications. Nous nous proposons de nous occuper d'abord de la détermination des ombres dans les dessins, et ensnite de la perspective.

Dans une école destinée à répandre les méthodes de la Géométrie descriptive, il serait convenable que les élèves commençassent les applications de ces méthodes par l'étude de la coupe des pierres et de la charpente. La correction rigoureuse des épures que comporte ce genre de recherches accoutume l'esprit et la main à plus de précision ; les problèmes qui se présentent sont plus variés en général et offrent plus d'exercice à la sagacité. Mais dans un cours spécialement consacré à la Géométrie descriptive proprement dite, il est naturel de prendre ponr premier objet d'application la Théorie des Ombres, qui doit être regardée comme le complément de cette science.

On a dit que la Géométrie descriptive doit être envisagée sous deux points de vue. Sous le premier, on la considère comme un moyen de recherches pour arriver, avec précision, à des résultats dont on a besoin; et c'est ainsi que l'em-

ploient la coupe des pierres et la charpente. Sous le second, elle est simplement un moyen de réprésenter les objets ; et dans ces cas, la détermination des ombres est pour elle un auxiliaire avantageux.

Les personnes qui sont au courant des méthodes de cette science savent qu'une projection seule ne suffit pas pour définir un objet ; qu'il faut nécessairement deux projections, parce qu'il y a toujours sur un plan une des dimensions qui manque, mais qu'au moyen de deux projections, les trois dimensions se trouvent déterminées. Lors donc que l'on considère la description d'un objet faite complètement au moyen de ses deux projections, on doit comparer la projection horizontale avec la projection verticale ; et c'est de cette perpétuelle comparaison que l'on déduit la connaissance de la forme de l'objet proposé.

Quoique la méthode des projections soit facile, et qu'elle ne soit pas dépourvue d'un genre particulier d'élégance, cependant cette obligation de comparer sans cesse deux projections l'une à l'autre est une fatigue qu'on peut diminuer considérablement par l'indication des ombres.

Supposons en effet que l'on ait une projection horizontale, comprenant toutes les dimensions en longueur et en largeur, mais qui ne détermine en rien les dimensions en hauteur, si l'on admet que les corps soient éclairés d'une manière bien connue (et il convient d'adopter en général la manière la plus naturelle, celle avec laquelle nous sommes le plus familiarisés), par des rayons de lumière parallèles entre eux, par exemple, ces corps vont porter ombre les uns sur les autres et sur le plan horizontal au-dessus duquel ils sont placés ; et par le moyen de l'étendue des ombres et de leurs formes, on jugera immédiatement des dimensions verticales. Ainsi, la direction des rayons de lumière étant connue, on n'a pas besoin de deux projections : une seule, avec le tracé des ombres, donnera une idée complète

de l'objet que l'on considère; et si l'on a la projection horizontale et la projection verticale, l'un et l'autre avec les ombres construites, ces deux projections seront plus aisées à lire, et montreront plus facilement l'objet que si l'on n'avait que les projections nues et sans ombres.

Ainsi, pour tous les arts où il s'agit de représenter des objets, où la Géométrie descriptive n'est pas employée comme moyen de recherches, mais d'exposition, la détermination des ombres est avantageuse et rend plus parfaite la représentation que l'on se propose de tracer.

La détermination des ombres comprend deux parties distinctes : l'une est la description graphique du contour des ombres, l'autre est la recherche de l'intensité des teintes à attribuer à chaque partie des surfaces qui reçoivent ces ombres.

Nous nous occuperons d'abord de la première partie de celle qui est relative à la description graphique.

De la Description graphique des Ombres.

133. La théorie des ombres est entièrement fondée sur un phénomène que tout le monde connaît, c'est que la lumière se propage en ligne droite. Nous sommes si accoutumés à cette proposition, que toutes les fois qu'on cherche à vérifier si une ligne est droite, on la compare à un rayon de lumière. Veut-on s'assurer qu'une règle est droite, on la compare, dans toute sa longueur, avec le rayon de lumière passant par ses deux extrémités; cherche-t-on à savoir si une rangée d'arbres est alignée, on se place de manière que le rayon de lumière qui vient d'une extrémité de cette rangée jusqu'à l'œil passe de long des arbres, et si tous sont placés exactement le long de ce rayon, on reconnaît qu'ils sont parfaitement alignés.

Nous admettons donc, comme principe, que la lumière



se répand en ligne droite. Il faut cependant observer que cette proposition n'est rigoureusement vraie que quand le milieu dans lequel la lumière se meut est d'nne densité uniforme; mais dans les applications aux arts que nous avons ici uniquement en vne, on a rarement besoin de considérer les rayons de lumière comme prolongés à une grande distance, et traversant des milieux de densités sensiblement différentes : il nous sera donc permis de supposer les milienx uniformes, et les rayons de lumière rigoureusement en ligne droite.

Nous distinguerons deux cas : celui où l'espace est éclairé par un point luminenx nnique, et celui où il est éclairé par un corps lumineux de dimensions finies ; et nous considérerons d'abord le premier cas.

Le point lumineux lance dans tous les sens des rayons de lumière dont l'ensemble occupe entièrement l'espace, si ancun corps ne s'offre pour les arrêter dans leur direction. Il n'en sera pas de même s'il se trouve un corps opaqne, c'est-à-dire qui ne soit pas pénétrable aux rayons de la lumière, qui les arrête ou les réfléchisse en tout ou en partie : les rayons qui ne le rencontreront pas continueront de se répandre dans l'espace; mais ceux sur la direction desquels il est placé seront arrêtés, et ne s'étendront pas dans la partie dc l'espace qui est au-delà, et qui, par l'interposition du corps, sera ainsi privée de lumière.

Concevez une surface conique ayant son sommet au point lumineux et enveloppant le corps opaque, et supposez-la prolongée indéfiniment; elle sera, au-delà du corps opaque, la limite de la partie de l'espace dans laquelle pénètrent les rayons envoyés par le point luminenx, et de celle où il ne saurait en arriver aucun. Cette dernière partie, privée de lumière par l'interposition du corps opaque, est ce qu'on appelle l'*ombre* de ce corps; telle est du moins la définition de ce qu'on entend par le mot *ombre*, lorsqu'en parlant d'une éclipse

de lune, par exemple, on dit que la lune entre dans l'ombre de la terre. Le soleil est le corps lumineux duquel les rayons partent et se répandent dans toutes les directions ; la terre est le corps opaque qui intercepte une portion de ces rayons; et derrière elle, par rapport au soleil, il se trouve une partie de l'espace privée de lumière. Tant que la lune est hors de cette partie, elle est éclairée et renvoie de la lumière, elle est visible; mais du moment qu'elle y entre, elle ne reçoit plus de lumière, n'en renvoie plus, et devient invisible.

Dans le langage ordinaire toutefois, ce n'est pas là ce qu'on entend le plus souvent par le mot *ombre,* lorsque, par exemple, en se promenant au soleil on remarque que les *ombres sont courtes à midi.* Dans cette acception, l'ombre n'est point l'espace privé de lumière par l'interposition d'un corps qui arrête une partie des rayons lancés par le point lumineux, mais c'est la projection de cet espace sur la surface qui la reçoit; c'est dans ce dernier sens que nous emploierons habituellement ce mot.

Supposons que le point lumineux soit à une distance infinie, les rayons de lumière qui viendront de là jusqu'à nous seront parallèles entre eux, à peu près comme nous le paraissent ceux du soleil. Dans cette hypothèse, à laquelle nous nous arrêterons d'abord, on peut considérer deux cas, celui dans lequel le corps opaque qui porte ombre est terminé par des surfaces planes, et par conséquent par des arêtes rectilignes et par des sommets d'angles solides, et celui où il est terminé par des surfaces arrondies. Nous commencerons par nous occuper du premier, qui est extrêmement simple.

Si le corps qui reçoit la lumière et qui porte ombre est terminé par des faces planes, on conçoit aisément qu'une partie de ces faces est éclairée, que l'autre est obscure, et que la ligne qui, sur ce corps, sépare la partie éclairée de

celle qui ne l'est pas, est formée par l'ensemble des arètes rectilignes d'intersection des faces obscures et des faces éclairées; cette ligne est facile à trouver, et c'est elle qui détermine le contour de l'ombre cherchée. Si l'on conçoit que le corps opaque vienne à disparaître, mais que cette même ligne continue de subsister, et qu'on lui suppose une épaisseur sensible, l'ombre de cette ligne, tracée sur la surface qui doit la recevoir, sera le contour de l'ombre du corps. On voit que, dans le cas que nous considérons, le problème se réduit à trouver l'ombre de certaines lignes droites connues de position.

Pour fixer les idées et rendre ce qui précède plus sensible, supposons que le corps qui porte ombre soit le parallélépipède ABCD*abcd* (pl. 25, fig. 50), que la direction des rayons de lumière parallèles entre eux soit indiquée par L*l*, et que le plan MN soit la surface qui doit recevoir l'ombre. On juge immédiatement, d'après la direction des rayons de lumière, que les faces ABCD, AA*ab*, AD*ad*, sont éclairées, et que les faces DC*dc*, CB*cb* et *abcd* ne le sont pas; que les arètes DC, CB, B*b*, *ba*, *ad* et *d*D sont les limites de la partie éclairée et de la partie obscure. Les ombres D'C', C'B', B'*b*', *b*'*a*', *a*'*d*', et *d*'D' de ces six arêtes, sur le plan MN, forment le contour ou les limites de l'ombre du parallélépipède; les ombres des six autres arètes, tombant dans l'intérieur de l'aire enveloppée par ce contour, sont confondues dans l'ombre totale du corps proposé.

En général, quand il s'agit de corps terminés par des surfaces planes, les arètes limites, ou qui séparent les faces éclairées des faces obscures, se distinguent immédiatement ou sont faciles à déterminer; et plus tard nous indiquerons un moyen simple de les reconnaître sûrement, si dans quelques circonstances leur position pouvait laisser de l'incertitude. La question se borne donc, comme nous l'avons déjà dit, à trouver l'ombre d'un certain assemblage de lignes droites connues de position.

Cherchons en premier lieu l'ombre d'une de ces droites. Nous observerons que le corps qui porte ombre étant connu de forme et de position par rapport aux plans de projection, les arètes qui terminent ses faces sont également connues par rapport à ces mêmes plans, c'est-à-dire qu'on a ou qu'on peut trouver leurs projections horizontales et verticales. Supposons que l'objet lumineux soit un point unique placé à une distance infinie; la direction des rayons de lumière, dans ce cas, sera donnée par la projection horizontale et verticale d'une ligne droite à laquelle ils devront tous être parallèles. Les rayons de lumière qui rencontrent la droite dont nous cherchons à déterminer l'ombre forment un plan dont la position, par rapport aux plans de projection, résulte de la condition de passer par la droite proposée et d'être parallèle à la direction de la lumière. Ce plan, prolongé, contient évidemment l'ombre de la droite; ou, si l'on considère le corps dont cette droite est une des arètes, il sépare la partie éclairée de l'espace, de celle que l'interposition de ce corps prive de lumière. Ce même plan va rencontrer la surface sur laquelle l'ombre est reçue, suivant une certaine ligne qui est l'ombre portée par la droite sur cette surface, ou qui appartient au contour de l'ombre du corps proposé. La surface étant connue et déterminée par rapport aux plans de projection, on pourra toujours construire son intersection avec le plan que nous avons conçu, et parvenir ainsi à connaître complètement cette partie du contour de l'ombre cherchée.

Ce que l'on aura fait pour une première arète du corps qui porte ombre, on le fera pour une seconde, pour une troisième, et enfin pour toutes celles dont l'assemblage forme, sur ce corps, la séparation des faces éclairées des faces obscures.

Si le point lumineux était à une distance finie, la solution précédente serait encore applicable en y apportant une

légère modification. Les rayons de lumière partant de ce point dont on doit connaître les projections, et dirigés vers la première des arètes qu'on a considérées, formeront également un plan déterminé dans l'espace, ou par rapport aux plans de projection, par la condition de passer par cette droite et par le point lumineux; et les raisonnemens que nous avons faits tout à l'heure, relativement au plan qui, dans la première hypothèse, contenait les rayons de lumière parallèles, se répéteront pour celui qui contient les mêmes rayons, lorsqu'ils partent d'un point placé à une distance finie.

On voit que ces recherches ne sont que de simples applications des méthodes de la Géométrie descriptive. Reconnaître, sur le corps qui porte ombre, les arètes qui séparent la partie éclairée de la partie obscure; par ces arètes faire passer des plans qui soient parallèles à la direction des rayons de lumière, ou qui contiennent le point lumineux s'il n'est pas à une distance infinie, et construire les intersections de ces plans avec la surface qui doit recevoir l'ombre : dans le cas qui nous occupe, telle est toute la solution.

Nous avons dit que la distinction des arètes limites dont les ombres circonscrivent l'ombre propre du corps est en général facile à faire; et en effet, il suffit pour cela de chercher indistinctement les ombres de toutes les arètes : celles d'entre elles qui entreront dans l'intérieur du polygone formant le contour de l'ombre du corps ne peuvent appartenir aux arètes limites. Ainsi, dans la figure 50, les ombres $b'c'$, $d'c'$, $C'c'$, $A'a'$, $A'D'$, $A'B'$, des arètes bc, dc, Cc, Aa, AD, AB, n'appartiennent à aucune des arètes limites, puisqu'elles entrent dans l'intérieur du polygone $a'b'B'C'D'd'$.

Mais on peut avec moins de travail reconnaître si de deux faces planes d'un corps, l'une est éclairée et l'autre obscure, ou si elles sont toutes deux obscures, ou toutes

deux éclairées, et par conséquent si leur intersection est une arète limite ou non. En effet, par un point quelconque de cette intersection, imaginons un rayon de lumière; si des deux faces l'une est éclairée et l'autre obscure, ce rayon de lumière prolongé les laissera toutes deux du même côté; mais si elles sont l'une et l'autre éclairées ou l'une et l'autre obscures, il passera entre elles deux. Cela posé, les deux faces planes que nous considérons appartiennent à deux plans donnés de position dans l'espace, et dont par conséquent on peut construire les traces sur les plans de projection, ainsi que les projections horizontale et verticale de leur intersection; que par un point quelconque de cette intersection on fasse passer une ligne parallèle à la direction de la lumière, et que l'on construise ses deux points de rencontre avec les plans de projection; si ces deux points sont en dehors des traces des plans proposés, le rayon de lumière ne passe pas entre les deux plans, et l'un est éclairé et l'autre ne l'est pas; si l'un des points ou tous les deux se trouvent en dedans des traces, on en conclura que le rayon de lumière passe entre les deux plans, et que ces plans sont tous deux éclairés ou tous deux obscurs : dans le premier cas, leur intersection est une arète limite; dans le second, elle ne l'est pas. Ainsi l'on peut reconnaître d'avance quelles sont les arètes par rapport auxquelles on doit opérer, pour obtenir le contour de l'ombre du corps proposé.

Les corps que l'on considère dans les arts présentent fréquemment des arètes verticales; c'est ce qui rend souvent utile l'observation suivante. La projection horizontale de la ligne verticale se réduit à un seul point; la ligne passant par ce point dans le plan horizontal de projection et dirigée vers le point lumineux, renferme toujours la projection horizontale de l'ombre de la verticale, sur quelque surface que cette ombre soit reçue. Ce résultat est vrai, que

le point lumineux soit à une distance finie ou infinie. En effet, dans l'un et l'autre cas, l'ensemble des rayons de lumière passant par la verticale forme un plan vertical qui doit contenir l'ombre de la verticale proposée, et qui la donnera par son intersection avec la surface qui doit recevoir l'ombre. La trace de ce plan vertical, dans le plan horizontal de projection, contiendra par conséquent la projection horizontale de l'ombre, quelle que soit la surface qui la reçoive.

Au reste, cette observation s'applique également à toute droite perpendiculaire à un plan quelconque de projection. Le plan formé par les rayons de lumière qui passent par cette droite est perpendiculaire comme elle au plan de projection, et sa trace sur ce plan doit contenir évidemment la projection, sur ce même plan, de l'ombre portée par la droite sur quelque surface que ce soit. On conçoit que dans quelques circonstances, et en choisissant avec intelligence les plans de projection, le résultat précédent peut simplifier beaucoup les opérations.

Ce que nous venons de dire renferme à peu près tout ce qui est d'usage habituel dans la théorie des ombres, et résout les questions relatives aux corps terminés par des surfaces planes et des lignes droites, et éclairés par un point unique. Les livres qu'on a coutume de publier sur cet objet vont rarement plus loin, et n'ajoutent guère à ce qui précède que divers développemens d'opérations graphiques, pour lesquels nous renverrons aux leçons de Géométrie descriptive.

134. Passons maintenant au cas où le corps qui porte ombre n'est pas terminé par des surfaces planes. La ligne qui sépare, sur la surface du corps, la partie éclairée de la partie obscure, n'est plus, en général, un assemblage d'arètes facile à reconnaitre; c'est une courbe qu'il faut déterminer par la seule propriété d'être la limite de ces deux

parties. Les rayons de lumière que reçoit la partie éclairée pénétreraient dans le corps s'ils étaient prolongés : la partie obscure n'en reçoit pas, parce que ceux qui pourraient lui arriver auraient à traverser le corps qui porte ombre avant de lui parvenir; mais il est facile de voir qne les rayons qui vont à la courbe limite de la partie obscure et de la partie éclairée n'entrent pas dans ce corps et ne font qne toucher sa surface. Ces derniers rayons sont donc tangens à la surface du corps; chacun d'eux se tronve dans un plan tangent à cette surface et passant par le point lumineux. On peut donc construire la conrbe dont il s'agit en menant du point lumineux une snite de plans tangens à la snrface du corps proposé, et en déterminant les points de tangence; chaçun de ces points appartiendra à la courbe cherchée. Nous ne nous arrêterons cependant point à ce mode de solution, et nous allons en exposer un autre qui est aussi général et d'nn emploi plns facile pour le genre de recherches dont il s'agit; car on sait que l'élégance et la simplicité des constructions graphiques dépendent du système de moyens qn'on adopte pour obtenir chaque élément du résultat.

Nons supposerons toujours le point lumineux à une distance infinie, et la direction des rayons de lumière indiquée par les projections horizontale et verticale d'une ligne donnée, à laquelle ces rayons doivent être parallèles. Le corps qui porte ombre étant connu de forme et de position par rapport aux plans de projection, ainsi que la surface sur laquelle l'ombre doit être reçue, on demande de construire la projection de cette ombre, et pour y parvenir, de déterminer, sur la snrface du corps qui porte ombre, la conrbe qui sépare la partie obscure de la partie éclairée. Cette dernière recherche, outre qu'elle entre dans la solution du problème qui nous occupe, est encore intéressante pour les arts du dessin et de la peinture, puisqu'elle fait

connaître, sur la surface du corps éclairé, où doivent s'arrêter les teintes claires et commencer les teintes obscures.

La méthode qne nous allons exposer est analogue à celle qui a été donnée dans la Géométrie descriptive, pour les intersections des surfaces cylindriques.

Concevons un système de plans parallèles à la direction de la lumière, et de plus, perpendiculaires à l'un des plans de projection, au plan vertical, par exemple. Les opérations que nous allons indiquer pour l'un des premiers plans se répéteront aisément pour les autres.

Nous remarquerons d'abord que, puisqu'il est perpendiculaire au plan vertical de projection, il est entièrement projeté suivant sa trace, ainsi que toutes les lignes qu'il peut renfermer. On peut le concevoir comme composé de lignes parallèles à la direction de la lumière, ou, ce qui revient au même, de rayons lumineux. Or, il doit en général couper la surface du corps qui porte ombre suivant une courbe. Des rayons de lumière situés dans le plan, les uns rencontrent la courbe et s'y arrêtent : ils font évidemment partie des rayons qui sont interceptés par le corps proposé, et dont l'interruption produit l'ombre derrière ce corps; les autres ne rencontrent pas la courbe, et, n'éprouvant aucun obstacle, se propagent au loin dans l'espace; enfin, il se trouve des rayons de lumière qui, placés entre ceux qui rencontrent la courbe et ceux qui ne la rencontrent pas, ne font simplement que la toucher; et l'on observera que, si le corps qui porte ombre n'a pas des dimensions infinies, il doit se trouver en général deux rayons de ce genre. Ces derniers, tangens à la section du corps, par le plan que nous considérons, sont aussi tangens à la surface de ce corps; leurs points appartiennent donc, d'après ce que nous avons dit précédemment, à la courbe limite de la partie de la surface du corps qui est éclairée et de celle qui ne l'est pas; enfin, leurs points de rencontre avec la

surface sur laquelle l'ombre est reçue appartiennent également au contour de cette ombre.

Ce sont donc ces rayons qu'il nous importe de reconnaître et de construire; la propriété qui les caractérise doit nous en fournir les moyens. Puisqu'ils sont tangens à la courbe d'intersection de la surface du corps qui porte ombre, par le plan que nous considérons, leurs projections horizontales doivent être tangentes à la projection de cette même courbe. La surface du corps est connue, le plan coupant est donné de position; supposons donc que la projection horizontale de leur intersection soit construite. Si nous menons à cette projection des tangentes parallèles à la direction du rayon de lumière projeté sur le plan horizontal, elles seront les projections des rayons dont il s'agit, et les points de tangence seront les projectious horizontales de ceux où ces rayons de lumière touchent la surface du corps proposé. La projection ou la trace du plan coupant sur le plan vertical, contient la projection verticale du rayon de lumière; et pour déterminer, sur ces projections, celles des points de tangence dont on vient de parler, il suffit d'élever, par les projections horizontales de ces points, des lignes perpendiculaires à la commune intersection des deux plans de projection. On obtient donc ainsi, en projections horizontale et verticale, deux points de la courbe qui, sur la surface du corps proposé, sépare la partie éclairée de celle qui ne l'est pas.

Si l'opération que nous venons d'indiquer se répète pour un nombre quelconque de plans parallèles à la lumière, et perpendiculaires au plan vertical de projection, on trouvera, en projection horizontale, une pareille suite de points, par lesquels faisant passer une courbe, on aura la projection de la courbe limite qui, sur la surface proposée, sépare la partie éclairée de la partie obscure. On trouvera également, en projection verticale, une autre suite de

points, et la courbe qui les réunira sera la projection verticale de la même courbe limite.

Occupons-nous maintenant de la détermination du contour de l'ombre sur la surface qui doit la recevoir. Le plan parallèle à la lumière, que nous avons d'abord considéré, détermine en général, comme nous l'avons vu, deux rayons lumineux tangens à la surface du corps qui porte ombre, et qui sont eux-mêmes situés dans ce plan. Les points de rencontre de ces rayons avec la surface qui reçoit l'ombre appartiennent au contour qu'il s'agit d'obtenir. Ces points de rencontre doivent évidemment être placés sur la courbe de l'intersection du plan avec cette même surface. Le plan et la surface étant connus et déterminés de position, on peut construire la projection horizontale de leur intersection. Supposons cette projection construite; les projections horizontales des deux rayons de lumière que nous considérons, la rencontreront en des points qui seront les projections de ceux où les rayons eux-mêmes rencontrent la surface; et ces derniers points appartiennent, ainsi que nous l'avons dit, au contour demandé. Si, des points obtenus en projection horizontale, on mène des lignes perpendiculaires à la commune intersection des plans de projection, ces lignes détermineront, par leur rencontre avec la projection verticale du plan coupant sur lequel nous avons opéré, les projections verticales des mêmes points du contour de l'ombre portée.

En répétant cette dernière opération pour chacun des plans parallèles à la direction de la lumière, on obtiendra, sur l'une et l'autre projection, une série de points par lesquels faisant passer des courbes, on aura les projections horizontale et verticale du contour de l'ombre du corps proposé sur la surface destinée à la recevoir.

Au nombre des plans parallèles à la direction de la lumière, il peut s'en trouver qui, après avoir coupé le corps

portant l'ombre, ne rencontrent pas la surface qui doit la recevoir, ou quelques-uns des rayons tangens à la surface du corps, et déterminés par ces plans, peuvent ne pas rencontrer ensuite la courbe d'intersection de ces mêmes plans avec la surface sur laquelle on suppose que l'ombre doit être portée. Dans l'un et l'autre cas, ces circonstances feront reconnaître que cette surface ne reçoit pas entièrement l'ombre portée par le corps, mais qu'une partie lui échappe, pour être reçue par une surface plus éloignée, ou se perdre dans l'espace.

Pour rendre tout ce qui précéde plus facile à comprendre, nous allons l'appliquer à un exemple.

Soit une sphère représentée par les projections verticale et horizontale A, A' (pl. 26, fig. 51) de deux de ses grands cercles ; supposons que la direction des rayons de lumière soit donnée par les projections LL, L'L' d'une ligne à laquelle ils doivent être parallèles, et cherchons les projections horizontale et verticale de la ligne qui sépare la partie éclairée de la surface de la sphère de la partie obscure, et celles du contour de l'ombre portée par la sphère sur un cylindre droit à base circulaire, donné en projection horizontale par le cercle B'.

Conformément à la méthode que nous venons d'exposer, concevons une suite de plans parallèles à la direction de la lumière, perpendiculaires au plan vertical de projection, et par conséquent projetés sur ce plan suivant leurs traces Pp, P_1p_1, P_2p_2, etc. Considérons en particulier le plan P ; Il coupera la sphère suivant une courbe dont la projection verticale ne peut être que sur la trace Pp, et dont la projection horizontale sera la courbe $p'p'p'p'$. Après l'avoir construite, nous lui mènerons les deux tangentes $\Theta'\theta'$ et $T't'$, parallèles à L'L', lesquelles seront les projections horizontales de deux rayons de lumière tangens à la sphère ; quant aux projections verticales de ces mêmes rayons, elles ne

peuvent être l'une et l'autre que la trace Pp elle-même. Les points de tangence T′ et Θ′ sont les projections des deux points où ces rayons de lumière touchent la sphère, et qui appartiennent par conséquent à la courbe qui sépare, sur sa surface, la partie éclairée de la partie obscure. Pour avoir les projections verticales de ces mêmes points, on mènera les deux lignes T′T et Θ′Θ perpendiculaires à la commune intersection des deux plans de projection, prolongées jusqu'à la rencontre de la trace Pp, et l'on obtiendra ainsi, en T et Θ les projections verticales des deux points dont il s'agit. En répétant pour chacun des plans P_1, P_2, P_3, P_4, etc., l'opération que nous venons d'exécuter pour le plan P, on trouvera, sur le plan horizontal, la courbe $T'T'_1T'_2\Theta'_1\Theta'\Theta'_3\Theta'_4T'_5$, et sur le plan vertical, la courbe $TT_1T_2\ \Theta_1\Theta\Theta_3\Theta_4\ T_5$, pour les projections de celle qui, sur la sphère, sépare la partie éclairée de la partie obscure.

Reprenons les rayons de lumière dont T′t' et Θ′θ' sont les projections horizontales, et dont Pp est la projection verticale, et cherchons les points où ils rencontrent la surface du cylindre; ce seront des points du contour de l'ombre portée sur cette surface par la sphère. Le plan P coupe la surface du cylindre, suivant une courbe projetée sur le plan horizontal, dans le cercle qui sert de base au cylindre. Les lignes T′t' et Θ′θ' rencontrent ce cercle dans les points r' et ρ' qui sont par conséquent les projections horizontales des points de rencontre que nous cherchons : pour avoir leurs projections verticales, il suffit de mener les lignes $r'r$ et $\rho'\rho$ perpendiculaires à la commune intersection des deux plans de projection, et jusqu'à la rencontre de la ligne Pp. Si l'on répète également cette dernière opération relativement aux autres plans P_1, P_2, etc., on trouvera les projections verticales de divers autres points du contour de l'ombre portée par la sphère sur le cylindre, et l'on con-

struira la courbe $rr_1r_2\rho_1\rho\rho_3\rho_4$ qui sera la projection verticale de ce contour.

En considérant le plan P_3 et les deux lignes T'_3t_3 et $\Theta'_3\theta'_3$ qui sont les projections horizontales des deux rayons de lumière tangens à la sphère, situés dans le plan dont il s'agit, on observera que l'une de ces projections, celle qui est désignée par $T'_3t'_3$, ne rencontre pas la base du cylindre, qui est la projection horizontale, ainsi que nous l'avons observé de la section de la surface cylindrique par le plan P_3; le rayon de lumière auquel appartient la projection T'_3t_3, ne rencontre donc pas cette surface et passe à côté. On en conclura que l'ombre portée par la sphère n'est pas reçue en entier par le cylindre, et que le contour de cette ombre sur la surface cylindrique n'est point fermé, mais s'arrête aux points où les rayons de lumière tangens à la sphère sont aussi tangens au cylindre.

155. Nous avons supposé jusqu'à présent que le point lumineux était à une distance infinie; et cette hypothèse est celle qui est le plus fréquemment admise, parce qu'elle est à peu près conforme à la manière dont les corps sont éclairés par le soleil; mais si l'on supposait le point lumineux à une distance finie, il suffirait, pour rendre la méthode précédente applicable encore dans ce cas, de substituer aux plans parallèles que nous avons employés, une suite de plans assujettis à passer par le point lumineux, et du reste toujours perpendiculaires au plan vertical de projection, comme dans la première hypothèse.

Le procédé que nous venons d'exposer peut souvent se simplifier dans les questions particulières, d'après la génération de la surface du corps qui porte l'ombre et de celle qui la reçoit. Nous renverrons, à cet égard, aux méthodes de la Géométrie descriptive, qui, dans ces recherches, sont susceptibles de diverses applications intéressantes. Il nous suffit d'avoir fait connaître un mode de

solution qui comprend dans toute sa généralité le problème de la détermination graphique des ombres, lorsque le corps lumineux se réduit à un point unique.

La solution de ce problème satisfait à peu près à tout ce demandent habituellement les arts du dessin ; ce qui nous reste à dire nous donnera lieu de faire quelques observations qui ne seront pas sans intérêt sous le rapport de ces mêmes arts ; mais comme, en supposant que le corps lumineux ait des dimensions finies, les constructions graphiques deviennent extrêmement compliquées, et seraient d'ailleurs d'un usage à peu près nul, ce sera plutôt sous le point de vue de la théorie que sous celui des applications que nous allons traiter cette dernière partie de la détermination linéaire des ombres.

Lorsque le corps lumineux n'est qu'un point, et que rien dans l'espace ne réfléchit la lumière, l'ombre portée par un corps opaque sur une surface placée derrière doit être parfaitement noire, puisque aucun rayon ne peut y arriver directement, à raison de l'interposition du corps opaque, ni indirectement, car nous supposons qu'il n'existe aucun autre objet qui puisse y réfléchir de la lumière. Cette ombre étant donc d'un noir absolu, sera par conséquent égale dans toute son étendue ; et de plus elle se terminera brusquement à son contour qui sera une ligne parfaitement nette et prononcée.

Il n'en est pas ainsi lorsque le corps lumineux a des dimensions finies ; le contour n'est pas tranché brusquement, et c'est par une dégradation insensible que l'on passe du noir de l'ombre à la clarté.

En effet, cherchons ce qui a lieu dans ce cas, en supposant toujours qu'il n'existe dans l'espace que le corps lumineux, le corps opaque et la surface qui reçoit l'ombre.

Concevons un plan tangent à la fois au corps lumineux et au corps opaque, et tel, que les deux corps se trouvent

du même côté relativement au plan ; puis concevons-en un semblablement tangent et infiniment voisin du premier, qu'il coupera suivant une droite tangente à la fois aux deux corps. Concevons encore un troisième plan tangent, infiniment voisin du second ; il le coupera suivant une antre droite également tangente aux deux derniers plans, et l'on observera que cette seconde ligne doit rencontrer la première, puisque l'une et l'autre se trouvent sur le second plan tangent. En multipliant ainsi les plans tangens, on aura une suite de lignes tangentes à la fois aux deux corps et se rencontrant deux à deux ; elles appartiendront à une surface que l'on doit reconnaître, d'après sa génération que nous venons d'indiquer, pour être du genre de celles qu'on appelle *développables* (110).

Cette surface developpable enveloppe à la fois le corps lumineux et le corps opaque ; et dans la partie de l'espace qu'elle renferme au-delà de ce dernier, il ne peut pénétrer aucun rayon lancé par le corps lumineux ; l'aire de l'intersection de cette surface avec celle qui reçoit l'ombre sera donc d'un noir parfait, et par conséquent égal dans toute son étendue.

Maintenant, concevons une autre suite de plans tangens au corps lumineux et au corps opaque, mais placés de manière que l'un de ces corps se trouve d'un côté du plan, et que l'autre se trouve du côté opposé ; les intersections successives de ces plans donneront naissance, comme tout à l'heure, à une nouvelle surface développable qui enveloppera, ainsi que la précédente, le corps lumineux et le corps opaque ; mais on observera, par rapport à cette surface et aux lignes droites dont on peut la concevoir composée, que l'un des corps se trouve d'un côté et l'autre du côté opposé. Il résulte de cette disposition, que de tous les points extérieurs à cette seconde surface développable on découvre en entier le corps lumineux, sans qu'aucune

partie de ce corps puisse être cachée par l'interposition du corps opaque. Si l'on construit l'intersection de cette surface avec celle qui reçoit l'ombre, chacun des points situés en dehors de cette intersection jouira d'une clarté totale, c'est-à-dire recevra tous les rayons qui peuvent lui parvenir du corps lumineux.

Si l'on considère maintenant les deux surfaces développables à la fois, on remarquera que, dans l'espace qu'elles comprennent entre elles, au-delà de leurs courbes de tangence avec le corps opaque, une partie des rayons lancés par le corps lumineux est interceptée par le corps opaque, et qu'ainsi cette portion de l'espace n'est pas complètement éclairée. Cherchant ensuite ce qui a lieu sur la surface qui reçoit l'ombre, on observera que l'aire comprise entre les deux contours données par les intersections de cette surface avec les deux surfaces développables, forme en général une espèce d'anneau pour lequel l'ombre et la clarté sont incomplètes. Au milieu se trouve l'ombre absolue, et en dehors la clarté totale; mais chacun des points situés dans l'aire annulaire elle-même ne reçoit qu'une partie des rayons émanés du corps lumineux, le reste lui étant enlevé par l'interposition du corps opaque. Si ce point pris sur l'aire annulaire est voisin du contour intérieur donné par la première surface développable, il ne peut recevoir la lumière que d'un très petit segment du corps lumineux, le corps opaque lui dérobant tout le reste; il est par conséquent très près de l'obscurité. Si ce même point est voisin du contour extérieur donné par la seconde surface développable, il n'y a, par rapport à lui, qu'une très-petite partie du corps lumineux qui reste couverte par le corps opaque; il est donc très-près de jouir de la clarté totale. On voit par là que, du contour intérieur au contour extérieur déterminés par les deux surfaces développables, l'ombre va en diminuant et la clarté en augmentant, de

manière qu'il y a une dégradation insensible entre l'ombre absolue renfermée dans le contour intérieur, et la clarté totale qui a lieu au-delà du contour extérieur : cette aire annulaire, qui entoure l'ombre absolue et dans laquelle l'ombre et la clarté sont incomplètes, se nomme la *pénombre*, ce qui signifie *presque ombre*.

Nous n'avons encore considéré la distribution de l'ombre et de la lumière que sur la surface placée derrière le corps opaque ; il nous reste à la considérer également sur la surface même de ce corps.

La courbe de tangence de la première surface développable avec le corps, forme la ligne de séparation de la partie de la surface qui ne peut recevoir aucun rayon de lumière, de celle qui peut en recevoir. La courbe de tangence avec la seconde surface développable forme également, sur la surface du corps opaque, la ligne qui sépare les points pour lesquels une partie des rayons lumineux est interceptée par la convexité même du corps opaque, de ceux pour lesquels cette convexité ne peut en arrêter aucun. Il se trouve donc sur la surface du corps opaque, entre sa face obscure et sa face éclairée, une zone ou *pénombre* sur laquelle l'intensité de l'ombre diminue par gradation insensible, pour passer de l'ombre absolue à la clarté totale.

Ce que nous venons d'exposer, en embrassant dans toute sa généralité le problème qui nous occupe, se simplifie beaucoup et devient très-sensible dans des exemples particuliers. Supposons que le corps lumineux et le corps opaque soient l'un et l'autre des sphères représentées par les cercles L et O (pl. 27, fig. 52), sur un plan de projection dans lequel leurs centres soient placés ; que la surface sur laquelle l'ombre doit être portée soit le plan SS perpendiculaire à la ligne LO qui joint les centres des sphères. Dans ce cas, tous les plans tangens à la fois aux deux corps, et

placés de manière qu'ils se trouvent tous du même côté par rapport à chaque corps, formeront, comme on le sait, par leurs intersections successives, une surface conique que nous indiquerons par les lignes TT′, TT′, suivant lesquelles cette surface coupe le plan de projection. Son sommet, ou centre, tombera au-delà de la sphère O; si cette sphère est d'un rayon plus petit que la sphère L; et au contraire en-deçà de L, si cette dernière sphère est la plus petite. C'est à cette surface conique que se réduit la première surface développable que nous avons considérée en traitant le cas général. On voit aisément que l'espace qu'elle renferme au-delà de la sphère opaque ne peut recevoir aucun rayon de lumière émané de la sphère L; son intersection avec le plan SS est un cercle dont MN est le diamètre, et dont l'intérieur est absolument privé de lumière.

Si l'on conçoit maintenant d'autres plans tangens également aux deux sphères, mais tels que, par rapport à chaque plan, l'une des sphères se trouve d'un côté et l'autre du côté opposé, ces plans, par leurs intersections successives, formeront une autre surface conique dont le sommet sera placé entre les deux sphères, et que nous indiquerons, comme la première, par les lignes *tt′*, *tt′*, qui sont ses intersections avec le plan de projection; cette seconde surface conique répond à la seconde surface développable que nous avons considérée dans le cas général. On voit de même que tout l'espace qu'elle laisse à son extérieur reçoit les rayons émanés de la sphère L, sans qu'aucun soit arrêté par la sphère O. Son intersection avec le plan SS est un cercle dont *mn* est le diamètre, et tous les points du plan extérieurs à ce cercle reçoivent les rayons de lumière sans obstacle de la part de la sphère opaque.

Mais l'espace compris entre les deux surfaces coniques au-delà de leurs courbes de tangence avec la sphère, et

qui se trouve indiqué sur le plan de projection par les aires angulaires T'*ct'*, T'*ct'*, ne reçoit pas complètement les rayons lumineux de la sphère L, puisque chacun de ses points ne peut découvrir qu'une partie du corps lumineux, le reste lui étant dérobé par l'interposition de la sphère opaque : cet espace ne sera donc pas entièrement obscur ni entièrement éclairé. Les points du plan SS, situés entre le cercle du diamètre MN et le cercle du diamètre *mn*, seront dans ce cas ; l'intervalle de ces deux cercles formera donc un anneau pour lequel ni l'ombre ni la clarté ne seront absolues.

Si, sur cet anneau, on prend un point voisin du cercle intérieur, tel que le point *p*, on voit, d'après la figure, qu'il ne peut recevoir des rayons lumineux que de la partie de la sphère L, correspondante à l'arc *gf*; si au contraire on prend un point voisin du cercle extérieur, tel que *p'*, on voit qu'il peut recevoir des rayons de la partie de la sphère lumineuse, correspondante à l'arc *g'f'*, beaucoup plus grand que *gf*; la clarté doit donc aller en augmentant, ou l'ombre en diminuant, du cercle intérieur au cercle extérieur, ou dans l'étendue de ce que nous avons nommé la *pénombre*.

Sur la surface de la sphère opaque, la courbe de tangence du premier cône est un cercle projeté suivant son diamètre *aa*. La courbe de tangence du second cône est un autre cercle projeté suivant son diamètre *bb*. La partie de la surface de la sphère O qui est au-delà du cercle *aa* est entièrement dans l'obscurité ; celle qui est en-deçà du cercle *bb* reçoit sans obstacle tous les rayons de lumière. Mais les points situés sur la zone comprise entre ces deux cercles ne voient qu'en partie la sphère lumineuse, sont par conséquent dans un état intermédiaire entre la clarté et l'obscurité, et l'ombre perd de son intensité, du cercle *aa* au cercle *bb*, sans qu'il y ait nulle part de passage brusque et précis : il y a également une sorte de *pénombre* dans l'étendue de cette zone.

On peut regarder, en général, comme inutile de déterminer d'une manière géométrique les contours des pénombres, ce qui serait d'ailleurs fort long et fort embarrassant; mais quelques observations assez simples peuvent fournir des données sur la mesure de la largeur qu'il convient de leur attribuer.

La distance entre le corps lumineux L et le corps opaque O, restant la même, si l'on rapproche paralèllement à lui-même le plan SS de ce dernier, la ligne N*n* qui indique la largeur de la pénombre diminue; si on éloigne ce plan, elle augmente. On voit aisément qu'elle est proportionnelle à la distance du corps opaque au plan sur lequel l'ombre est portée, et qu'elle dépend d'ailleurs de l'angle *nc*N formé par les arètes TT′ et *tt*′ des deux cônes qui enveloppent la sphère opaque et la sphère lumineuse, angle qui dépend lui-même de la distance entre le corps opaque et le corps lumineux, et des dimensions de ce dernier.

Si nous supposons que le corps lumineux soit le soleil, la distance de cet astre à la terre étant partout sensiblement la même, l'angle dont il s'agit sera toujours égal, quel que soit le corps opaque que l'on considère comme éclairé par le soleil. Cet angle mesure ce qu'on appelle le diamètre apparent du soleil; il est d'environ un demi-degré, et de cette donnée on peut conclure que la largeur de la pénombre sera environ la 115ᵉ partie de la distance comprise entre le point qui porte l'ombre et celui où elle est reçue sur le plan, que nous supposons à peu près perpendiculaire à la direction du rayon de lumière. Il est facile de voir que s'il s'éloignait de cette position, la largeur de la pénombre augmenterait dans le rapport inverse du sinus de l'angle que le plan ferait avec la direction de la lumière : on trouverait, par exemple, en supposant cet angle de 45 degrés, que la largeur de la pénombre devrait être la 81ᵉ partie de la distance entre le point qui porte l'ombre et celui où cette ombre est reçue.

Il est donc essentiel, dans les dessins, de donner une plus grande largeur à la pénombre, à mesure que l'ombre portée s'éloigne de l'objet qui la produit; et les résultats que nous venons d'indiquer suffisent pour faire connaître l'étendue à donner à chaque partie de la pénombre, avec plus de précision même que l'exécution des dessins ne le comporte ordinairement.

Nous avons remarqué qu'il se trouvait également une pénombre, ou zone incomplètement éclairée, sur la surface du corps opaque. Supposons toujours que ce corps soit la sphère O; et pour trouver l'étendue de l'arc *ba* qui mesure la largeur de la pénombre, concevons aux points *b* et *a* deux normales à la surface, qui, dans le cas de la sphère, seront les deux rayons *ob* et *oa*. On sait que l'angle formé par les normales est égal à celui que forment entre elles les tangentes TT′ et *tt′*; ainsi, la mesure de l'arc *ba* ne dépend que de deux élémens, l'angle formé par les tangentes et le rayon *ob* auquel l'arc est proportionnel.

Si la lumière vient du soleil, l'angle dont il s'agit est toujours le même, quel que soit le corps éclairé, et d'un demi-degré à peu près.

On en conclura donc que la largeur de la pénombre sur la sphère est à peu près égale à la 115ᵉ partie du rayon.

On peut, sans erreur sensible, étendre ce résultat à un corps de figure quelconque, en observant que, pour avoir la largeur de la pénombre correspondante à un point déterminé de la ligne de séparation de la face obscure et de la face éclairée de ce corps, il faut concevoir par ce point, et dans le sens du rayon de lumière, un plan normal à la surface du corps, et prendre la 115ᵉ partie du rayon de courbure de cette section.

En nous bornant à ce qui précède, sur cette partie de la théorie des ombres qui a pour objet la détermination géométrique de leurs contours, il nous reste à traiter de celle

qui est relative à la recherche de l'intensité des teintes qu'il faut donner aux différentes parties des surfaces ombrées, pour qu'elles nous offrent, dans les dessins, toutes les apparences d'ombre et de lumière que les objets imités nous présentent dans la nature; mais pour embrasser un tel sujet dans toute son étendue, il ne suffit pas d'envisager uniquement, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, un corps lumineux, un corps opaque et une surface qui reçoit l'ombre, en faisant abstraction de toute circonstance accessoire. Il faut étudier les objets avec tout ce qui les entoure dans la réalité, et avoir égard, entre autres choses, à la position du spectateur, et aux modifications que la lumière peut éprouver avant d'arriver à son œil, pour y porter la sensation du spectacle sur lequel il attache sa vue; ces considérations nous semblent exiger que nous fassions précéder ce que nous avons à dire sur cette matière, par l'exposition de la théorie de la perspective.

THÉORIE DE LA PERSPECTIVE.

136. L'art de la Perspective consiste à représenter, sur un tableau dont la forme et la position sont connues, des objets également donnés de forme et de position, tels qu'ils paraîtraient à un œil dont la position serait aussi déterminée. Pour rendre cette définition encore plus sensible, supposons que le tableau soit d'abord une glace transparente. Si de tous les points des objets proposés, on conçoit des rayons dirigés vers l'œil, que ces rayons, en traversant le tableau transparant, y laissent leurs traces empreintes de

la couleur et de la teinte propre aux points dont ils partent, l'ensemble de ces traces formera sur le verre la représentation complète des objets : c'est cette représentation qu'on se propose d'obtenir dans l'art de la Perspective. On voit qu'ici, comme dans la théorie des ombres, on doit admettre deux parties distinctes : l'une est purement géométrique, et son objet est de déterminer d'une manière précise sur le tableau la position de chaque point représenté; l'autre a pour objet la recherche de la teinte d'ombre et de lumière qu'on doit donner à chaque partie du tableau, et c'est par des considérations physiques qu'on peut en général la traiter. Cette dernière partie, qu'on désigne sous le nom de *Perspective aérienne*, rentre entièrement dans le cercle des recherches que nous essaierons d'exposer plus tard, pour compléter la théorie des ombres; nous ne nous occuperons donc ici que de la première partie, appelée *Perspective linéaire*.

D'après les définitions que nous venons de donner, il est facile de concevoir que la Perspective linéaire se réduit à construire la section qu'une surface déterminée fait dans une pyramide dont le sommet et la base sont donnés. L'œil est le sommet; la base peut être regardée comme répandue sur la surface des objets qu'on se propose de mettre en perspective, et la surface sécante est le tableau.

Les méthodes de la Géométrie descriptive donnent aisément la solution de ce problème pris dans toute sa généralité, c'est-à-dire en supposant même que le tableau soit une surface courbe quelconque; cependant, comme nous avons surtout en vue ce qui est d'une utilité habituelle dans les arts, nous ne nous étendrons avec quelque détail que sur ce qui concerne les perspectives à tracer sur des surfaces planes, et nous nous contenterons de présenter ensuite quelques observations concernant les perspectives à construire sur des surfaces courbes.

12

Nous supposerons que le tableau soit un plan vertical ou perpendiculaire à celui des plans de projection que l'on considère comme horizontal : on pourrait sans difficulté le supposer incliné d'une manière quelconque par rapport à ces plans ; mais l'hypothèse à laquelle nous nous arrêtons est plus naturelle et simplifie les constructions.

Ainsi, la position de l'œil, celle d'un objet connu de forme, et enfin celle d'un plan vertical, étant données par rapport aux plans de projection, il s'agit de trouver les rencontres de ces plans avec les droites menées de l'œil à chacun des points de l'objet proposé, et de les rapporter sur un tableau représentant ce même plan vertical supposé rabattu.

Diverses constructions peuvent donner les points de rencontre avec plus ou moins d'avantage et de facilité, selon les positions respectives de l'objet, de l'œil et du tableau ; nous allons exposer, en premier lieu, celle qui est la plus simple et ordinairement la plus commode.

Plaçons d'abord le plan vertical de projection dans une position telle, que celui du tableau lui soit perpendiculaire, et qu'en conséquence ce dernier s'y trouve projeté par une ligne verticale qui sera sa trace. Soient O′ et O″ (pl. 28, fig. 53) les projections de l'œil, T′T′ et T″T″ celles du tableau, ou les traces du plan vertical auquel il appartient ; supposons qu'on ait au-delà les projections des objets à mettre en perspective, déjà faites, ou que l'on doit commencer par faire sur les plans de projection qu'on a adoptés ; par exemple, celles d'une pyramide à base quadrangulaire, dont les sommets ou angles solides A, B, C, D, E, soient donnés en projection horizontale aux points A′, B′, C′, D′, E′, et en projection verticale aux points A″, B″, C″, D″, E″.

Si, de l'œil, on mène une ligne à un premier point de l'objet proposé, on aura pour les projections de cette ligne,

les droites O′A′ et O″A″. Les points *a′* et *a″* où ces droites coupent les projections T′T′ et T″T″ du tableau, sont évidemment les projections du point de rencontre du rayon visuel avec le tableau ; il ne s'agit plus que de trouver la position de ce point sur le tableau lui-même, que nous concevrons enlevé de sa position T′T′T″T″, et placé en MN. Un moyen simple d'y parvenir, est de déterminer sur ce tableau deux lignes que l'on prendra pour des axes auxquels tous les autres points doivent se rapporter ; la position de ces axes étant fixée sur les plans de projection, on cherchera la distance à laquelle se trouve, de chacun d'eux, le point de rencontre du rayon visuel avec le tableau, et, à l'aide de ces distances, la situation du point sur le tableau sera facile à marquer. Ces deux axes pouvant être pris arbitrairement, nous supposerons que, par l'œil, on mène deux plans, l'un horizontal et l'autre vertical, perpendiculaires tous deux au tableau ; leurs traces sur ceux de projection seront O′Y et O″X ; ils couperont le plan du tableau suivant deux lignes, l'une horizontale, représentée en projection verticale par le point *x*, et l'autre verticale, représentée en projection horizontale par le point *y* ; ces deux lignes seront les axes que nous adopterons, et sur le tableau, nous les représenterons, savoir, par XX l'axe horizontal, et par YY l'axe vertical.

Cela posé, nous avons dit que *a′* est la projection horizontale du point où le rayon visuel mené au point A rencontre le tableau ; *ya′* sera donc la distance à laquelle ce point doit se trouver de la verticale passant par le point *y*, ou de l'axe YY sur le tableau MN. Si donc sur ce tableau, on mène à droite ou à gauche de l'axe YY, selon qu'en projection horizontale *a′* est à droite ou à gauche de *y*, une parallèle à une distance égale à *ya′*, cette parallèle *aa′* renfermera le point cherché. De même *a″* étant la projection verticale du même point, *xa″* mesure la distance à laquelle

ce point se trouve de l'axe horizontal, mené dans le tableau par le point x : qu'on tire donc sur le tableau une parallèle $a''a$ à l'axe XX, en ayant l'attention de la placer au-dessus ou au-dessous, selon que, dans la projection verticale, le point a'' sera au-dessus ou au-dessous du point x ; les deux lignes $a'a$, $a''a$, parallèles aux axes, donneront par leur rencontre le point cherché, ou la perspective du point A ; on peut faire la même opération pour tous les points de la pyramide ABCDE, dont on obtiendra ainsi la perspective complète.

Quelques observations abrégeront beaucoup le travail. On remarquera d'abord que la perspective d'une ligne droite est une ligne droite lorsque le tableau est une surface plane. En effet, les rayons visuels menés de l'œil aux divers points de la droite proposée sont dans le plan mené par cette droite et par l'œil ; par conséquent, leurs points de rencontre avec le tableau doivent être sur la droite d'intersection du tableau par le plan auquel ils appartiennent. Ainsi, il suffit de construire les perspectives des deux points de la ligne proposée, et de les joindre par une droite, pour avoir la perspective de la ligne elle-même. Dans l'exemple que nous avons pris, on pourra donc se contenter de construire les perspectives des cinq sommets A, B, C, D, E, de la pyramide ; et en les joignant par des droites, on aura les perspectives des arêtes.

En second lieu, si le corps dont on veut faire la perspective est opaque et impénétrable aux rayons visuels, la partie antérieure dérobera la vue de l'autre partie ; il est donc inutile de construire la perspective des points qui appartiennent à cette dernière ; ainsi, dans l'exemple proposé, le point E de la pyramide ne pouvant être aperçu de l'œil placé au point O, il est inutile de chercher sur le tableau MN le point qui lui correspond.

La partie visible d'un objet est séparée de celle que l'œil

ne peut apercevoir par une ligne que l'on appelle contour apparent. La perspective du contour apparent est le trait qui, sur le tableau, enveloppe l'image de l'objet qu'on se propose de représenter ; il est donc important, en général, de bien déterminer le contour apparent d'un objet et d'en faire avec soin la perspective.

Lorsque les objets à représenter sont terminés par des surfaces planes et des arètes rectilignes, il est en général facile de distinguer les faces visibles pour une position déterminée de l'œil, de celles qui ne le sont pas, et, par conséquent, de reconnaître celles des arètes dont l'assemblage forme la ligne du contour apparent. Mais lorsque ces objets sont terminés par des surfaces courbes, le contour apparent n'est plus formé de lignes droites : c'est alors une courbe qu'il faut déterminer sur la surface du corps, à l'aide de son caractère particulier, qui est de séparer la partie du corps qui est visible de celle qui ne l'est pas, par rapport à un œil dont la position est donnée. On voit que cette recherche est tout-à-fait semblable à celle de la ligne qui sépare, sur un corps opaque, la partie éclairée de la partie obscure, lorsque le corps lumineux est un point unique, placé à une distance finie : il s'agit également de trouver la courbe de tangence d'un cône dont le sommet est donné, et qui enveloppe un corps terminé par une surface connue. Nous croyons inutile de nous arrêter à cette recherche, et nous renverrons aux solutions que nous avons données, des questions parfaitement analogues, dans la Théorie des Ombres.

137. Nous devons faire connaître ici un résultat de perspective très-important par ces fréquentes applications, et dont l'observation est essentielle pour la correction du dessin ; il consiste en ce que toutes les fois que l'on doit mettre en perspective plusieurs lignes droites parallèles entre elles (mais non pas au tableau), sur quelque tableau

que ce soit, les perspectives de ces droites concourent en un seul point. Si ce tableau est plan, ces perspectives sont elles-mêmes des lignes droites qui passent toutes par le même point, proposition facile à démoutrer.

En effet, une droite étant donnée pour la mettre en perspective, on conçoit que l'ensemble de tous les rayons visuels menés de l'œil à cette ligne forme un plan passant par la ligne et par l'œil, et dont l'intersection par le tableau trace la perspective demandée; alors, si, par l'œil, on suppose une droite parallèle à la ligne donnée, elle se trouve en entier dans le premier plan. Maintenant, qu'on ait une seconde ligne parallèle à la première, à mettre également en perspective, et que l'on considère aussi le plan passant par cette ligne et par l'œil, comme traçant par son intersection avec le tableau la perspective qu'il s'agit d'obtenir, puis qu'on mène par l'œil une droite parallèle à la seconde ligne donnée, elle sera entièrement dans le second plan. Mais les deux lignes données étant parallèles, les droites qu'on mène par l'œil, parallèlement à la première et à la seconde, se confondent en une seule qui est en même temps dans le premier plan et dans le second : elle est donc leur ligne d'intersection; le point où elle rencontre le tableau et par conséquent celui où se croisent les lignes suivant lesquelles ces plans coupent le tableau, ou, ce qui revient au même, celui où concourent les perspectives. Il suit de là que, pour mettre en perspective tant de droites parallèles qu'on voudra, il n'y a qu'à mener par l'œil une ligne qui leur soit parallèle : le point où cette dernière rencontrera le tableau, sera le point de concours auquel tendront les perspectives de toutes ces droites.

Les projections de la droite menée par l'œil sont parallèles à celles de la ligne à mettre en perspective, et sont par conséquent faciles à construire; on a les traces du tableau sur les plans de projection : il est donc aisé de trouver le point de rencontre de la droite et du tableau.

Le résultat que nous venons d'exposer peut abréger beaucoup les opérations, lorsque le tableau est une surface plane, et qu'il s'agit de tracer les perspectives des différentes lignes parallèles. Dans ce cas, ces perspectives sont elles-mêmes des lignes droites, et leur point de concours étant déterminé ainsi que nous l'avons indiqué, il suffira, pour les tracer, de connaître sur le tableau, relativement à chacune d'elles, la perspective d'un second point.

Mais ce n'est pas seulement comme moyen d'abréviation que ce que nous venons de dire doit être considéré, c'est encore le procédé le plus sûr pour éviter des incorrections dont notre œil est facilement blessé. Nous sommes en général moins sensibles aux grandeurs réelles des objets qu'au parallélisme des lignes que nous jugeons devoir être parallèles. Que deux lignes soient un peu plus éloignées ou un peu plus rapprochées l'une de l'autre qu'elles ne doivent l'être, il faudra un œil exercé et qnelque attention pour saisir ce défaut; mais si elles doivent être parallèles et qu'elles ne le soient pas, nous nous en apercevrons sur-le-champ, et nous en serons vivement choqués. Si donc, lorsqu'on met en perspective plusieurs lignes parallèles, les perspectives qui doivent concourir au même point n'y concourent pas en effet, cette erreur blesse extrêmement l'observateur, et les parallèles ne lui paraissent plus telles; ainsi, on peut toujours regarder comme essentiel de déterminer sur le tableau le point de concours des lignes qui représentent les perspectives des droites parallèles, afin d'être sûr que les perspectives passent par ce point.

Dans l'exposition du procédé de construction que nous avons donné ci-dessus, nous avons supposé que le plan vertical de projection était perpendiculaire au plan du tableau; nous avons trouvé, dans cette disposition, l'avantage d'avoir le tableau projeté en entier sur une seule ligne. Si le tableau était oblique au plan vertical de projection,

pour trouver la hauteur de chaque point de la perspective au-dessus de l'axe horizontal auquel on le rapporte, il faudrait, du point où la projection horizontale du rayon visuel rencontre la trace horizontale du tableau, abaisser une perpendiculaire snr l'intersection des deux plans de projection, et la prolonger jusqu'à la rencontre de la projection verticale du rayon visnel. Ce travail, quoique assez long, peut, dans quelques circonstances, être moins pénible que la construction préliminaire d'une projection verticale sur un plan perpendiculaire au tableau.

Supposons qu'on ait à mettre en perspective une suite de pilastres semblables, et dont la direction soit oblique au plan du tableau; il serait fort long d'en faire la projection snr un plan vertical perpendiculaire au tableau, mais en la faisant snr un plan perpendiculaire à la direction des pilastres, elle se réduit à la projection d'un seul d'entre eux. On voit que, dans ce cas, il devient préférable d'adopter cette dernière disposition, malgré l'inconvénient d'avoir une ligne de plus à tracer pour construire la perspective de chaque point.

138. En général, le problème que présente la perspective linéaire, en le considérant dans ses élémens, se réduit à construire le point de rencontre du tableau par le rayon visuel mené de l'œil à un point déterminé; et il est utile de connaître plusieurs moyens de le résoudre, afin de faire usage, en chaque circonstance, de ceux qui exigent le moins de travail. La plupart des méthodes données dans les ouvrages qui traitent de la Perspective, et particulièrement celle que nous avons déjà développée, rentrent dans le mode général de solution que nous allons indiquer.

Si, par le point à mettre en perspective et par l'œil, on conçoit deux plans différens, le rayon visuel se confondra avec leur intersection; et comme ils couperont nécessairement le tableau, si l'on construit les lignes ou les traces suivant lesquelles ils le rencontrent, le point où ces traces

se croiseront appartiendra à l'intersection des deux plans entre eux, et sera par conséquent le lieu de rencontre du rayon visuel et du tableau. C'est au dessinateur à choisir, parmi le nombre infini de plans qui peuvent passer par l'œil et par le point à mettre en perspective, les deux plans dont il lui est le plus facile de déterminer les traces sur le tableau. En les prenant perpendiculaires chacun à l'un des plans de projection, on retombe sur la méthode de construction que nous avons déjà donnée. Il peut être souvent avantageux de supposer l'un des plans perpendiculaire au tableau même; dans ce cas, il est aisé de voir que sa trace passera par les pieds des perpendiculaires abaissées de l'œil et du point proposé sur le tableau. Plus généralement, si l'on conçoit, par le point et par l'œil, deux lignes parallèles entre elles, l'intersection du tableau et du plan qui les contient passera par les points où le tableau est lui-même rencontré par ces parallèles.

Ces diverses observations suffisent pour mettre les personnes qui sont au courant des méthodes de la Géométrie descriptive en état d'abréger dans un grand nombre de cas, et de simplifier beaucoup les opérations qu'exige la pratique de la Perspective linéaire.

Supposons maintenant que le tableau ne soit plus un plan, mais une surface courbe donnée; les considérations que nous venons d'exposer doivent en général conduire, pour chaque cas, à la plus avantageuse des constructions possibles. En effet, parmi tous les plans passant par l'œil et par le point dont on demande la perspective, et qui contiennent en conséquence le rayon visuel, on peut toujours choisir celui qui, d'après la nature connue de la surface proposée pour tableau, donne, par son intersection avec ce tableau, la courbe la plus aisée à construire, soit sur le plan même que l'on considère, soit dans l'une de ses projections. Il sera ensuite facile de trouver l'intersection de

cette courbe avec le rayon visuel, ce qui déterminera le point où le rayon rencontre le tableau.

Si, par exemple, le tableau était une surface sphérique, il faudrait que le plan mené par l'œil et par le point à mettre en perspective passât également par le centre de la sphère; alors l'intersection serait toujours un grand cercle, dont on trouverait facilement, sur le plan même, la rencontre par le rayon visuel.

Si le tableau était une surface conique, on ferait passer constamment le plan contenant le rayon visuel par le sommet du cône; l'intersection de ce plan avec le tableau serait une ligne droite dont on trouverait sans peine les projections, et leur point de rencontre avec celles du rayon visuel.

Les *panoramas* sont des perspectives tracées sur des surfaces cylindriques verticales à base circulaire, le point de vue étant pris sur l'axe même de ces surfaces. Pour mettre un point quelconque en perspective sur la surface d'un cylindre vertical, on concevra, par l'œil et par le point proposé, un plan vertical qui coupera cette surface suivant une de ses arêtes, déterminée par la rencontre de la trace horizontale du plan avec la circonférence du cercle servant de base au cylindre. Que l'on fasse la projection verticale de cette arête, sa rencontre avec la projection verticale du rayon visuel déterminera la hauteur à laquelle le rayon visuel rencontre la surface du cylindre, au-dessus de la base de ce dernier; et il sera facile, d'après ces données, de construire la perspective du point proposé, soit sur la surface même du cylindre, soit sur le tableau supposé développé.

139. Ce qui précède donnant les moyens de résoudre toutes les questions que peut présenter la perspective, nous n'ajouterons plus que quelques observations.

Lorsqu'on a un tableau offrant la perspective d'un objet,

prise d'un point déterminé, on peut en déduire le tracé d'une perspective du même objet, prise du même point de vue, et sur un tableau différent. En effet, l'œil et le premier tableau étant déterminés de position, la direction des rayons visuels menés de l'œil à chacun des points de l'objet représenté se trouve fixée, et l'on peut en déduire par conséquent leur rencontre avec la surface d'un autre tableau dont la position est donnée.

Mais ce qu'on vient de dire ne saurait plus avoir lieu, si l'on prenait un autre point de vne ; rien dans ce cas ne déterminant la direction des rayons visuels, et une simple perspective ne suffisant pas pour définir l'objet représenté. Une perspective est une sorte de projection qui ne diffère de la projection orthogonale dont on fait habituellement usage, qu'en ce que la première s'opère par des lignes qui concourent au point de vue d'où la perspective est prise, tandis que, pour la seconde, ces lignes sont perpendiculaires au plan de projection; or, on sait qu'un objet n'est complètement défini qu'à l'aide de deux projections : il ne le serait également qu'à l'aide de deux perspectives, par rapport à chacune desquelles on connaîtrait la position du point de vue.

Nous terminerons ici nos recherches sur la partie géométrique de la théorie des ombres et de la perspective. Les méthodes que nous avons exposées embrassent, relativement à la représentation des objets, à peu près tous ce qui, dans l'usage, est susceptible d'un tracé rigoureux. Ainsi, divers objets étant proposés et déterminés par leurs projections, si on les suppose éclairés d'une manière connue, on construira les contours des parties éclairées et des parties obscures sur la surface de chacun d'eux, et ceux des ombres qu'ils portent les uns sur les autres; puis on tracera sur un tableau d'une forme donnée la perspective de ces mêmes objets, ainsi que des contours de leurs ombres, prise

d'un point connu; il ne restera plus, pour compléter leur représentation, qu'à donner aux diverses parties de leur image les teintes avec lesquelles, dans la réalité, elles s'offrent à nos regards.

De la Détermination des teintes dans la représentation des objets, et de la Perspective aérienne.

140. La partie de la théorie des ombres et de la perspective dont nous avons maintenant à nous occuper est très compliquée, et a besoin d'être étudiée avec plus de soin qu'elle ne l'a été jusqu'à présent; elle exige quelques connaissances physiques, et surtout un grand nombre d'observations.

Malheureusement les peintres, qui sont obligés de réfléchir à tout moment sur cette matière, publient peu les résultats de leurs méditations sur leur art. Peut-être plusieurs découvertes curieuses, des observations importantes, demeurent-elles ignorées et perdues pour l'instruction générale, parce que les artistes qui les ont faites n'ont pas su en rendre un compte précis, ou ont négligé de prendre ce soin. Nous sommes bien loin de présenter les recherches que nous allons exposer comme un corps complet de doctrine; ce ne sont que des idées jetées en avant et destinées à ouvrir une carrière à peu près nouvelle : puissent nos essais faire naître des recherches plus profondes, et devenir ainsi, pour la science, le principe de quelques progrès ultérieurs.

La teinte qu'offre à notre vue un objet éclairé dépend, premièrement, de l'intensité propre de la lumière reçue du corps lumineux et renvoyée à notre œil, et de la manière dont a lieu sa distribution sur la surface de l'objet, et la réflexion qui la fait parvenir jusqu'à nous ; secondement, des modifications que la lumière éprouve par l'effet des milieux ou de l'air qu'elle traverse, et des autres circonstances auxquelles elle est soumise : c'est dans cet ordre que se

suivront les considérations auxquelles nous allons nous livrer.

Commençons par chercher l'intensité de la lumière venant du corps lumineux à l'objet éclairé, et, pour plus de simplicité, supposons que le corps lumineux soit unique, et considérons-le comme réduit à un point. On sait que *l'intensité de la lumière émise par un point lumineux diminue en raison inverse du carré de la distance;* il est évident, d'après ce principe, que plus l'objet éclairé est éloigné du corps lumineux, moins il en reçoit de clarté. Cette observation n'est pas d'une très grande importance dans les arts du dessin, parce qu'on suppose habituellement les objets éclairés par le soleil. Dans ce cas, la distance du corps lumineux étant immense, par rapport aux dimensions des objets éclairés et aux distances qui les séparent entre eux, elle peut être regardée comme égale pour tous, et par conséquent il n'y a aucune différence entre l'intensité de la lumière qui parvient aux divers points des objets que l'on considère; mais si l'on avait à représenter une scène nocturne, éclairée par une lampe ou un foyer, il faudrait avoir égard aux distances des objets éclairés au corps lumineux, et donner une clarté plus vive à ceux qu'on voudrait faire paraître plus voisins du point d'où part la lumière.

Ce que nous venons de dire n'est relatif qu'aux parties éclairées; quant aux parties dans l'ombre, dès qu'on suppose qu'il n'y a qu'un seul point lumineux, et qu'on fait abstraction de tout ce qui peut réfléchir la lumière, elles ont toutes une intensité égale, elles sont toutes d'un noir absolu. Cette assertion peut paraître extraordinaire, parce que nous ne sommes pas habitués à voir les corps éclairés de cette manière : le soleil est bien pour nous, dans le jour, la cause de la lumière, mais les autres corps la réfléchissent et nous la renvoient, tellement qu'il fait clair où les rayons directs du soleil n'arrivent pas, et que nous n'avons jamais

occasion de voir une ombre complète ; on ne peut s'en former une idée que par les expériences de la chambre noire, et surtout par celles du microscope solaire. Lorsqu'on introduit dans la chambre noire un faisceau de rayons solaires, en les faisant tomber sur un verre lenticulaire, ces rayons se réunissent au foyer, s'y croisent et de là divergent, en formant un cône de lumière qui se projette, suivant un cercle très lumineux, sur le mur opposé de la chambre. Que l'on dispose un tableau très blanc pour recevoir ce cercle lumineux, et qu'au devant, l'on place un objet qui intercepte une partie des rayons, l'ombre paraîtra du noir le plus intense et sera terminée par un contour très précis, très tranché. Dans ce cas, en effet, la lumière part d'un point unique, le foyer du verre lenticulaire par lequel passent les rayons lumineux, et il n'y a pas assez de lumière réfléchie pour diminuer sensiblement l'obscurité de la chambre noire, dans les parties où les rayons n'arrivent pas directement.

141. Considérons maintenant la lumière renvoyée de l'objet éclairé à l'œil de l'observateur. Si elle avait à traverser un milieu parfaitement libre, qui ne lui offrît aucune résistance, qui n'en interceptât aucune partie, deux objets de la même clarté paraîtraient à notre œil de la même clarté, quelle que fût leur distance par rapport à nous. Pour s'en rendre compte, que l'on conçoive deux cercles égaux, également éclairés, et situés sur des plans également inclinés par rapport aux rayons menés de leurs centres à l'œil; l'intensité de la lumière renvoyée par chacun d'eux décroîtra en raison inverse du carré de leurs distances jusqu'à l'œil, mais en même temps, les grandeurs des images suivant lesquelles ces cercles se peindront à l'œil, décroîtront aussi en raison inverse des carrés des mêmes distances. Ainsi, d'une part, si la lumière renvoyée par tous les points du cercle le plus éloigné est moins intense, d'une autre part,

elle est plus rassemblée et se condense pour nous offrir une image plus resserrée; ces deux effets contraires, se trouvant dans le même rapport, se balancent pour donner lieu à la sensation que notre œil éprouve, et il en résulte que les deux cercles placés à des distances inégales doivent pourtant présenter la même clarté.

Cependant, il n'en est pas ainsi dans la nature, parce que l'air dans leqel se meut la lumière n'est pas complètement transparent. Nous chercherons plus tard à apprécier les altérations que sa transparence imparfaite fait éprouver aux rayons lumineux; mais nous devons auparavant examiner comment la lumière se comporte à la surface des corps éclairés, soit pour s'y distribuer, soit pour revenir à notre œil.

Nous diviserons les surfaces en deux classes, relativement à la manière dont elles reçoivent et renvoient la lumière; savoir, les surfaces polies, et les surfaces mattes.

Nous ne connaissons pas de surfaces parfaitement polies, mais nous regarderons comme approchant de cet état, celles qui forment *miroir*. On sait que les rayons de lumière qui viennent frapper une surface polie sont réfléchis en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Si la lumière émane d'un point unique, chaque point de la surface polie ne reçoit et ne réfléchit qu'un rayon, et parmi ces rayons, un seul parvient à l'œil; tous les autres lui échappent : l'œil n'aperçoit donc que le point de la surface qui lui renvoie ce rayon; le reste est pour lui dans une complète obscurité, et le point visible en parait d'autant plus brillant. La surface, la position de l'œil et celle du point lumineux étant connues, la détermination du point brillant est un problème de Géométrie descriptive, dont la solution est plus ou moins compliquée, suivant la génération de la surface proposée; il s'agit en effet, de trouver sur cette surface un point tel, que menant de là des lignes à l'œil et au point lumineux,

ces lignes soient dans un plan perpendiculaire au plan tangent et fassent avec lui des angles égaux (34). Il est facile de voir qu'en supposant la surface polie assez étendue, il doit y avoir en général un point brillant. Sur les surfaces planes, sur celles qui ont dans un sens des élémens plans indéfinis, telles que les surfaces cylindriques, coniques et développables, il ne peut se trouver, ainsi que sur les surfaces arrondies, que des points brillans, et non pas des lignes ou des arètes brillantes, du moins tant que la lumière vient d'un point unique. Si elle vient d'un corps de dimensions finies, plusieurs points de la surface polie renvoient à l'œil des rayons dont l'ensemble lui présente l'image plus ou moins altérée du corps lumineux ; le reste demeure d'un noir d'autant plus parfait que la surface est plus polie. Lors donc que l'on doit répresenter un corps poli, il faut, après avoir déterminé la position du point brillant, peindre ce point d'un blanc très éclatant et tenir le reste du corps dans l'obscurité.

Les surfaces mattes dont se compose la seconde classe, beaucoup plus nombreuse que la première, diffèrent des surfaces polies, en ce que, de tous leurs points auxquels parviennent des rayons du corps lumineux, elles en renvoient à notre œil, à moins qu'un corps interposé n'y mette obstacle.

Il est assez facile de se faire une idée précise de la quantité de lumière que chaque partie d'une surface quelconque reçoit du corps lumineux que, pour plus de simplicité, nous regarderons comme un point unique. On sait déjà qu'abstraction faite de l'obliquité suivant laquelle la surface présente chacune de ses parties, l'intensité de la lumière qui lui arrive est en raison inverse du carré de la distance du point lumineux. De plus, si l'on conçoit que ce point soit le centre d'une sphère, la quantité de rayons reçue par un élément de la surface éclairée pourra se mesurer

par la portion de la surface de la sphère comprise dans le cône dont le sommet est au point lumineux, et dont la base est l'élément de la surface proposée. Plus cet élément sera oblique, par rapport aux rayons qu'il reçoit, plus le cône sera resserré, et moins la portion de la surface de la sphère qui s'y trouve comprise aura d'étendue. On peut donc en conclure que plus la surface éclairée se présente obliquement aux rayons lumineux, et moins elle recevra de lumière. On exprime d'une manière mathématique ces résultats, en disant que *pour chaque point de la surface, l'intensité de la lumière est en raison directe du sinus de l'angle d'incidence du rayon sur le plan tangent en ce point, et en raison inverse du carré de la distance au point lumineux.*

Il est plus difficile d'apprécier, d'une manière satisfaisante, comment la lumière est réfléchie par les corps mats, et quelle quantité chaque partie de leur surface en fait parvenir à notre œil. Cette recherche dépend de la contexture de l'enveloppe des corps ; et nos connaissances physiques sont trop imparfaites pour nous fournir les données qui nous seraient nécessaires : ce que nous allons dire sera donc fondé sur des hypothèses ; nos résultats ne seront que probables, et nous ne les proposons que jusqu'à ce que l'on puisse les remplacer par d'autres, fondés sur une théorie plus certaine.

Nous admettrons donc que chacune des molécules qui appartiennent à une surface matte agit à la manière d'un corps lumineux, en réfléchissant dans tout l'espace libre la lumière qu'elle a reçue et qu'elle n'absorbe pas. On sent que ces molécules doivent offrir une infinité d'aspérités, qui ne sont sensibles pour nous qu'en ce que le corps nous paraît mat, et qui n'empêchent pas que la surface qui l'enveloppe ne soit à nos yeux unie et continue. Dans cette hypothèse, chaque molécule placée à la surface du corps nous renvoie un rayon de lumière. Considérons un élement de la surface ; nous avons déjà vu que la distance à laquelle se

trouve de nous cet élément influe sur la grandeur de l'image qu'il nous présente, mais non sur la clarté avec laquelle il nous apparaît, autant du moins qu'on n'a aucun égard aux altérations qu'éprouve la lumière, par l'effet du défaut de transparence de l'air qu'elle traverse pour nous parvenir. L'ensemble des rayons réfléchis par tous les points appartenant à cet élément et dirigés vers l'œil forment un cône dont l'élément est la base, et l'œil le sommet ; et le nombre des rayons compris dans ce cône est proportionnel à l'étendue de l'élément de la surface. Si l'on conçoit une sphère dont l'œil soit le centre, et d'un rayon égal à la distance comprise entre la base du cône et l'œil, la portion de la surface de cette sphère qui sera comprise dans le cône donnera la mesure de l'espace angulaire dans lequel les rayons se trouvent réunis. L'intensité de la lumière arrivant à l'œil pourra donc s'évaluer par le rapport de l'étendue de l'élément que nous considérons, à celle de cette portion de la surface de la sphère. L'étendue de l'élément restant la même, celle de la portion correspondante de la surface de la sphère sera d'autant moins grande que cet élément fera un angle plus aigu avec les rayons visuels; ainsi, l'intensité de la lumière réfléchie par la surface matte sera d'autant moindre que cette surface approchera plus d'être perpendiculaire aux rayons qu'elle nous renvoie, ce qu'on peut exprimer d'une manière mathématique, en disant que, *pour chaque élément de la surface, cette intensité est en raison inverse du sinus de l'angle que fait le plan tangent avec le rayon visuel.*

Ce résultat ne doit pas être interprété à la rigueur, lorsque l'angle dont il s'agit est presque nul ; dans ce cas, les aspérités de la surface matte, se couvrant en partie les unes les autres, nous dérobent une portion de la lumière qu'elles devraient nous faire parvenir. Ainsi, en regardant une surface plane matte sous un angle très aigu, on ne la voit pas avec une clarté très intense, comme l'indique l'expres-

sion analytique que nous avons proposée; cette expression devient alors incomplète, parce qu'elle ne tient pas compte des petites aspérités dont la surface est couverte, et des rapports de leurs dimensions avec les distances qui les séparent.

Nous citerons un exemple remarquable à l'appui du résultat précédent.

La lune peut être regardée comme un corps mat, éclairé par le soleil, dont il nous renvoie les rayons. Si cet astre était enveloppé d'une atmosphère, les rayons qu'il nous renvoie des bords de son disque auraient à la traverser sur une plus grande épaisseur, et sans doute, ils nous arriveraient plus affaiblis que ceux qui viendraient du centre. Mais les observations astronomiques prouvent que la lune n'a point d'atmosphère sensible; et, à raison de sa forme sphérique, nous devons voir près de ces bords, une plus grande étendue de surface sous un même angle visuel : il doit donc nous arriver de là plus de rayons réfléchis, et les bords doivent en conséquence nous paraître plus éclairés; aussi observe-t-on que la clarté de la lune a plus d'intensité sur le contour de son disque que dans son milieu.

La nature nous offre un grand nombre de corps dont les surfaces sont intermédiaires aux deux classes extrêmes que nous venons de considérer, et participent jusqu'à un certain point, comme le démontre l'expérience, aux propriétés des surfaces polies et des surfaces mattes. Relativement à ces corps, on peut admettre que les molécules qui appartiennent à leur enveloppe extérieure sont des petites sphères à peu près polies, réfléchissant en partie la lumière, à la manière des corps polis, et plus ou moins engagées dans la solidité même du corps proposé, selon que son poli est plus ou moins parfait. Si elles étaient isolées, chacune offrirait un point brillant; mais comme elles ne nous laissent voir qu'une partie de leur contour, toutes ne peuvent pas

nous présenter un point de ce genre : celles-là seules jouissent de cette propriété, pour lesquelles le point brillant tombe sur leur segment antérieur et visible, qui se confond sensiblement avec la surface générale du corps. On peut conclure de là que si, sur la surface du corps proposé, considérée comme continue, on cherche la position du point brillant, ainsi qu'on le ferait dans le cas où le corps serait poli, on aura, en quelque sorte, le centre de la partie de la surface où se trouvent les molécules polies, susceptibles de nous offrir des points brillans ; et l'on conçoit que cette partie lumineuse sera d'autant moins resserrée, que les molécules polies dont il s'agit seront plus saillantes, ou que le corps sera moins lisse. En d'autres termes, on peut dire que, pour les corps imparfaitement polis, le point brillant s'élargit et se répand en s'affaiblissant sur un espace d'autant plus étendu que le poli est moins parfait. Sur le reste de la surface du corps proposé, les molécules ne nous renvoient la lumière que de la manière propre aux surfaces complètement mattes ; et ce que nous avons dit à ce sujet trouve là son application.

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré, dans la lumière, que l'intensité avec laquelle elle arrive au corps, s'y distribue et s'y réfléchit pour revenir à l'œil du spectateur ; nous avons fait abstraction des altérations qu'elle subit dans les milieux qu'elle traverse, et par l'effet des autres circonstances qui agissent sur elle : ce sont les modifications résultantes de ces diverses causes que nous avons maintenant à étudier.

142. L'air que la lumière traverse pour arriver jusqu'à nous n'est pas doué d'une transparence parfaite ; ses molécules arrêtent quelques rayons de lumière, et les réfléchissent, comme le font les corps opaques. Cet effet, qui est insensible pour les objets peu éloignés, devient frappant pour les lointains ; il s'étend sur les parties éclairées comme

sur les parties placées dans l'obscurité; il dimiuue l'intensité de la clarté des premières et de l'ombre des secondes, et modifie la couleur des objets.

La lumière que réfléchissent les molécules de l'air a une couleur déterminée; l'air, comme tous les autres corps de la nature, a sa couleur particulière; c'est ce qui forme le bleu de ce que nous appelons *le Ciel*. Si l'air n'existait pas, ou ne renvoyait pas de lumière, le ciel nous paraitrait d'un noir absolu, sur lequel les astres formeraient des points brillans. Le bleu du ciel est d'autant plus vif que l'air a moins d'humidité; et c'est pour cette raison que le ciel des pays méridionaux est habituellement d'un azur plus beau que celui des pays du nord.

Lors donc qu'un faisceau de lumière traverse une étendue d'air assez considérable, il perd en chemin une partie des rayons dont il est formé, et par conséquent de son intensité.

Cette observation n'est pas aussi importante lorsque l'on considère le rayon de lumière dans sa marche depuis le corps lumineux jusqu'à l'objet éclairé, que lorsqu'on le suit comme rayon visuel dans son retour de l'objet éclairé jusqu'à l'œil. En effet, relativement à tous les objets éclairés par le soleil, par exemple, qui s'offrent à nos regards dans un instant déterminé, la lumière traverse une couche d'air sensiblement égale pour éclairer chacun d'eux, et la perte qu'elle éprouve dans sa marche diminue également la clarté de tous. Il y a cependant des circonstances où il est essentiel d'avoir égard à cette perte; et, pour représenter dans un tableau un effet de soleil levant, un peintre remarquera que la lumière, traversant alors horizontalement une grande étendue de l'atmosphère avant de parvenir aux objets qu'elle colore, a bien moins de force et d'éclat qu'au milieu du jour.

Mais c'est surtout dans le trajet de l'objet éclairé jusqu'à

l'œil qu'il est essentiel d'examiner comment la lumière est altérée par la masse d'air interposée. Non-seulement une partie des rayons réfléchis par l'objet se trouve interceptée, mais les molécules d'air intermédiaires reçoivent aussi des rayons directs de lumière, et les réfléchissent avec leur propre couleur, dans la direction même de ceux qui sont renvoyés à l'œil par l'objet éclairé. La sensation que cet objet doit faire éprouver à l'œil est donc altérée de deux manières : d'abord, en ce qu'une partie des rayons qui doit la faire naitre est arrêtée, et ensuite, parce que des rayons étrangers et d'une couleur bleuâtre se mêlent aux premiers. Cet effet est d'autant plus prononcé que la masse d'air interposée est plus considérable ; et l'on peut admettre comme principe qu'à mesure que la distance des objets éclairés à notre œil augmente, leur clarté diminue, et leur couleur propre participe davantage de la couleur bleue de l'atmosphère.

Pour les objets dans l'ombre, un effet analogue a lieu. S'il n'y avait qu'un corps lumineux et point d'atmosphère, l'ombre serait d'un noir absolu ; mais les objets environnans, et particulièrement l'air lui-même, éclairent jusqu'à un certain degré les parties des corps qui ne reçoivent pas directement la lumière, et c'est ainsi que leurs formes deviennent sensibles pour nous. De plus, les rayons qu'elles peuvent nous renvoyer sont aussi en partie arrêtés par les molécules de l'air intermédiaire ; ces molécules reçoivent et réfléchissent vers notre œil d'autres rayons, qui nous parviennent dans la direction où l'ombre que nous considérons est placée relativement à nous, et qui affaiblissent l'intensité de cette ombre, en y mêlant une teinte bleuâtre ; on peut donc admettre également que plus les objets non éclairés sont éloignés de nous, plus l'ombre diminue d'intensité en se rapprochant de la teinte de l'atmosphère.

Concevons deux files d'objets semblables, se prolon-

geant à une grande distance, l'une composée d'objets éclairés, et l'autre d'objets dans l'ombre. La clarté des objets qui composent la première ira s'affaiblissant à mesure qu'ils s'éloignent; si on les suppose de couleur blanche, le blanc diminuera d'éclat, et de plus, il changera de couleur par degrés insensibles, d'un objet au suivant, mais d'une manière marquée sur la longueur de la file, et il passera à une teinte bleuâtre. En même temps, l'ombre des objets qui composent la seconde file diminuera d'intensité; elle s'éclaircira, non pas en s'approchant de la couleur blanche, mais de la couleur bleue. Si les deux files d'objets que nous considérons s'étendent extrêmement loin, il arrivera enfin que le blanc de ceux qui sont éclairés et le noir de ceux qui sont dans l'ombre, décroissant toujours pour se rapprocher du bleu, se perdront en se confondant dans la couleur de l'atmosphère. C'est ce qu'on remarque lorsqu'on aperçoit de hautes montagnes dans un lointain de vingt-cinq ou trente lieues; leurs cimes couvertes de neige et brillantes de clarté, leurs grandes ombres si prononcées, lorsqu'on les voit d'une petite distance et pendant un beau jour, tout s'éteint presque entièrement et se fond dans l'azur d'un ciel.

Ainsi, quand on veut faire sentir, dans un tableau, l'intervalle qui sépare deux objets inégalement éloignés, il est de principe de peindre celui qui est le plus distant de couleurs moins vives, en éteignant les clairs et en affaiblissant l'intensité des ombres; et quand on doit représenter des objets très lointains, les couleurs doivent prendre une teinte générale bleuâtre.

Ce principe est bien connu, et même on l'exagère, et l'on en fait très fréquemment un abus qu'il est utile de signaler. D'après ce que nous avons dit, ce n'est que lorsque la différence entre les intervalles qui séparent divers objets de notre œil devient considérable, qu'il en résulte

une différence sensible entre les effets produits par les masses d'air qui occupent ces intervalles, sur la lumière que les objets nous renvoient. Si l'on a, par exemple, devant les yeux une façade d'architecture, dont une partie forme une saillie ou un avant-corps d'un mètre, la couche d'air d'un mètre d'épaisseur que les rayons visuels venant de la partie en arrière-corps ont à parcourir de plus que les autres pour arriver jusqu'à nous ne leur ôte rien de leur intensité, ou du moins leur en ôte trop peu pour que la diminution soit appréciable par nos sens. En supposant donc l'avant et l'arrière et l'arrière-corps parallèles entre eux et semblablement éclairés, c'est à tort qu'on établirait une différence entre les teintes qu'il faut donner à l'un et à l'autre, comme le font beaucoup de dessinateurs; ils nous paraissent également éclairés, et doivent être représentés avec la même clarté.

Cependant, nous distinguons parfaitement, dans la réalité, qu'une partie forme saillie sur l'autre ; il n'est pas même nécessaire que l'avant-corps porte ombre sur la partie en arrière; et lors même que la direction du rayon de lumière venant du soleil, et la position de l'œil sont telles, qu'aucune ombre n'est apparente, on juge sans peine quel est le plan le plus voisin et quel est le plus éloigné. Il est essentiel de reconnaitre ce qui dirige à cet égard notre jugement, pour l'imiter s'il se peut, et que la peinture avertisse l'œil par les mêmes moyens que ceux qui l'avertissent dans la réalité.

Représentons-nous toujours une façade d'architecture, d'un ton de couleur parfaitement uniforme, et dont une partie forme sur l'autre un avant-corps. Si l'on place un obstacle quelconque, tel qu'une planche, qui nous dérobe la vue de l'arète par laquelle se termine l'avant-corps, il nous devient impossible de juger laquelle des deux parties est la plus voisine de notre œil; mais si l'obstacle est

enlevé, on en peut juger à l'instant. Cette expérience fort simple nous apprend donc que c'est par la manière dont la lumière agit sur l'arète qui termine l'avant-corps, que nous sommes avertis qu'il existe une saillie. Si l'arète dont il s'agit était une ligne droite mathématique, l'action de la lumière sur l'arète serait nulle, ou parfaitement inappréciable, et nous ne pourrions pas encore distinguer quelle est la partie qui est en avant-corps. Mais cette arète n'est jamais tranchante, jamais une ligne droite mathématique : les matériaux dont elle est composée ne sont pas d'une compacité absolue, les instrumens dont on fait usage pour les tailler ne sont point parfaits, on n'a point apporté au taillage une précaution infinie, et en sortant des mains de l'ouvrier, cette arète était déjà loin d'être rigoureusement précise. Depuis, tout ce qui a pu la frapper ou simplement la frotter, a dû l'émousser davantage; et définitivement, au lieu d'être une arète tranchante, ce n'est qu'une surface arrondie, que l'on peut considérer comme une portion de cylindre vertical circulaire, et d'un très petit rayon; c'est par la manière dont la lumière agit sur cette surface cylindrique et en est renvoyée à notre œil, que l'existence de la saillie nous est indiquée.

Nous avons montré précédemment que chaque partie d'une surface courbe reçoit d'autant plus de lumière qu'elle se présente plus directement aux rayons lumineux, et que la lumière qu'elle renvoie à notre œil a d'autant plus d'intensité que cette surface s'offre plus obliquement à nos regards. D'après ces principes, il doit se trouver sur la petite surface cylindrique qui représente l'arète du côté où vient la lumière, une partie dont la clarté est plus vive; et sur l'autre arète, une partie dont la clarté est moindre que celle de la façade du bâtiment ; le tout dépendant, pour la détermination précise, de la position de l'œil et de la direction des rayons lumineux.

Ainsi, pour faire sentir, dans l'exemple proposé, qu'il y a une partie de la façade qui forme saillie, il faut ménager aux arètes du côté de l'ombre une ligne un peu moins claire, et à celles qui sont du côté de la lumière, une ligne plus éclairée, qu'on appelle reflet; du reste, la teinte sur les deux plans parallèles dont se compose la façade doit être la même.

Nous devons ajouter cependant encore quelques développemens qui tiennent à d'autres considérations.

Nos organes sont doués de certaines propriétés qui altèrent les sensations qu'ils nous transmettent. L'organe de la vue, par exemple, prolonge la sensation au-delà de l'instant où il l'éprouve; c'est ce que démontre une expérience bien connue : quand on fait mouvoir avec rapidité un charbon allumé, placé au bout d'un bâton, on voit, non pas le charbon occupant successivement différens points, mais un ruban de feu continu.

Ce même organe jouit d'une autre propriété, c'est d'étendre, d'agrandir les objets, d'autant plus qu'ils sont plus éclairés; en voici un exemple frappant. Quelques jours après la nouvelle lune, et lorsqu'elle approche de son premier quartier, elle est visible sur l'horizon, encore un peu après le coucher du soleil; un quart environ de son disque seulement est éclairé, mais ce qui est dans l'ombre reçoit par réflexion quelque lumière de la terre, et n'est pas invisible pour nous; la partie éclairée parait alors d'un diamètre beaucoup plus grand que celle qui est dans l'ombre, et il semble y avoir un ressaut considérable au passage de la courbure de l'une à la courbure de l'autre. A l'époque du dernier quartier, et avant le lever du soleil, la même illusion se renouvelle; mais la partie dans l'ombre au premier quartier est alors éclairée, et paraît à son tour plus grande que l'autre, qui est devenue obscure. Plusieurs expériences confirment cette faculté qu'a la vue,

d'étendre les dimensions des objets blancs et éclairés, aux dépens de ceux qui sont obscurs; nous ne rapporterons que l'expérience suivante, comme la plus simple. Lorsqu'on place à côté l'une de l'autre plusieurs bandes parallèles, parfaitement égales en largeur et alternativement noires et blanches, en les regardant d'un point un peu éloigné, les bandes blanches paraissent beaucoup plus larges que les noires.

Une troisième propriété que l'œil partage avec nos autres organes, tient à ce qu'en général les sensations fortes affaiblissent momentanément en nous la perception des sensations plus faibles. C'est ainsi que le canonnier, qui vient d'entendre la décharge d'une batterie, est insensible à l'impression d'un bruit médiocre. Il arrive même qu'une sensation vive, éprouvée par un organe, couvre tout-à-fait une sensation reçue ensuite par un autre organe d'une sensibilité plus obtuse. Avant de boire de la liqueur, nous sentons son parfum, mais notre odorat y devient insensible aussitôt que nous en avons bu quelques gouttes; la sensation forte éprouvée par le palais émousse tout-à-fait la sensibilité de l'odorat. Cet effet des sensations vives est très remarquable sur l'organe de la vue : les objets brillans nous rendent insensibles à ceux qui ne jouissent que d'une moindre lumière; lorsque l'on passe du grand jour dans un lieu peu éclairé, on ne distingue rien dans dans les premiers momens ; on a de la peine à reconnaître les personnes les plus voisines de soi, mais peu à peu la vue s'habitue à cette faible clarté, et l'on parvient, après quelque temps, à lire même un caractère assez fin. Il est vrai qu'au moment où l'on passe de la lumière à l'obscurité, la prunelle de l'œil se dilate, et permet l'entrée à un plus grand nombre de rayons; mais cette dilatation de la prunelle a lieu instantanément, et n'est pas la cause de l'effet que nous venons de rappeler : il tient à ce que

l'œil ne perd que lentement l'impression vive que lui a laissée la clarté du grand jour.

En appliquant ces remarques à la détermination du reflet qu'on doit ménager sur une arète éclairée, on reconnaitra que ce reflet parait à l'œil un peu plus large qu'il ne l'est en effet, et que les parties contiguës paraissent un peu plus obscures. Pour reproduire dans la peinture ces apparences, essentielles à la vérité de l'image, il faudra donner une plus grande largeur au reflet, et placer parallèlement, à droite et à gauche, une teinte un peu plns sombre sur une faible étendue. Si nous avions à notre disposition des couleurs aussi vives que celles de la nature, si nous pouvions peindre le reflet d'un blanc aussi éclatant que celui qui a lieu dans la réalité, il deviendrait inutile de lui donner plus de largeur, et de le rehausser en quelque sorte par l'opposition de teintes plus sombres placées à côté : la copie fidèle de ce qui existe reproduirait sur nos organes l'effet produit par l'objet lui-même; mais nous sommes obligés de compenser, par une sorte d'exagération qui nous est facile, l'imperfection des moyens d'imitation.

143. Après avoir traité des modifications que la lumière éprouve spécialement dans son intensité absolue, et quelles que soient les couleurs dont elle nous apporte la sensation, il nous reste à examiner quelles sont les variations que subissent les couleurs elles-mêmes, par l'action des diverses causes qui peuvent les modifier. Cette recherche se rattache à la partie de l'Optique dont l'objet est l'étude de la lumière colorée ; elle est beaucoup trop vaste pour que nous l'embrassions dans son entier, et nous nous bornerons à un petit nombre d'observations, que nous croyons susceptibles d'un assez fréquente application.

Une des causes principales des variations qu'éprouvent les couleurs tient à la nature du corps lumineux; ainsi le bluet des champs, qui est d'un beau bleu pendant le jour, semble violet à la clarté d'uue bougie; à la même clarté,

le vert des feuilles et des plantes devient beaucoup plus sombre, et le jaune se rapproche beaucoup d'un blanc un peu rose; c'est la raison pour laquelle les personnes dont le teint n'est pas très blanc paraissent avec plus d'avantage à la lumière.

Mais les changemens qu'on observe dans les couleurs ne proviennent pas uniquement de la nature de la lumière, soit directe, soit réfléchie, dont les objets sont éclairés; ils tiennent souvent, en partie, à une appréciation inexacte que nous faisons des couleurs, lorsque notre jugement est, pour ainsi dire, faussé par des circonstances particulières : nous en citerons quelques exemples.

Le matin, avant le lever du soleil, et lorsque le ciel est d'un bel azur, si, devant une fenêtre ouverte, nous avons sur une table un papier blanc et une bougie, le papier se trouve à la fois éclairé par la clarté de la bougie et par la lumière déjà répandue dans l'atmosphère, et que l'air nous renvoie. Dans ces circonstances, que nous placions un corps qui intercepte en partie la clarté de la bougie par rapport au papier, l'ombre portée sur le papier ne sera plus éclairée que par l'atmosphère, elle paraîtra d'un beau bleu, ce qui doit être en effet, puisque la lumière réfléchie par l'atmosphère est bleue; mais si nous éteignons la bougie, le papier ne sera en entier éclairé que par cette même lumière bleue, et cependant nous n'hésiterons pas alors à le juger blanc; et s'il se trouve à côté un papier d'une teinte bleue, il nous paraîtra sensiblement blanc comme le premier.

Supposons encore que nous soyons dans un appartement dont les fenêtres soient parfaitement exposées au soleil, et que nous les fermions par des rideaux rouges; la pièce sera alors entièrement éclairée par de la lumière rouge : au bout de quelques instans, l'œil, familiarisé avec la teinte rougeâtre répandue sur tous les objets, reconnaît pour blancs ceux qui sont de cette couleur, et il regarde aussi comme blancs ceux qui sont de la couleur rouge des rideaux. Mais

ce n'est pas tout : si dans le rideau il se trouve une ouverture de trois ou quatre millimètres de diamètre, et qu'on présente à peu de distance un papier blanc pour recevoir le faisceau de rayons du soleil qui passe par cette ouverture, ces rayons peindront sur le papier blauc une tache verte ; si les rideaux étaient verts, la tache serait rouge.

Nous ne pouvons pas ici expliquer pourquoi la tache est verte dans le premier cas, et rouge dans le second, parce que cê phénomène dépend de la théorie de la composition de la lumière ; mais nous allons essayer d'exposer comment il se fait que, l'appartement étant éclairé par de la lumière rouge, par exemple, un objet blanc qui reçoit cette lumière paraît encore blanc, un objet rouge paraît également blanc, et ponrquoi la lumière blanche des rayons solaires, qui n'éprouve aucune altération, puisqu'elle passe par une ouverture du rideau et qu'elle est reçue sur un papier blanc, paraît cependant d'une couleur toute différente.

Il nons est nécessaire de faire précéder ce que nous avons à dire snr ce sujet, par quelques considérations sur le rôle que la lumière blanche joue, en général, dans l'opération de la vision.

Lorsque l'on regarde un corps, quelle qu'en soit la couleur, chaque molécule de sa surface visible nous renvoie des rayons blancs avec ceux qui sont empreints de la couleur propre du corps.

Plus nous recevons des rayons de ce genre, et plus l'objet nous paraît éclairé, ou plus sa couleur nous paraît vive et claire. On connaît le cinabre, substance composée de soufre et de mercure, de laquelle on obtient ce rouge brillant qu'on emploie dans la peinture des vitraux : en masse, le cinabre est d'un ronge brun assez terne, et semblable à celui de la brique fortement cnite; mais à mesure qu'on le broie, il perd cette couleur obscure et foncée; en se divisant, il acquiert plus de surface, et nons renvoie de la lumière blanche par nn plus grand nombre de points; enfin, quand

il est réduit en poudre impalpable, il offre un rouge très éclatant, et devient du vermillon. Chaque molécule du ci nabre renvoie donc à l'œil plus ou moins de lumière blanche; et c'est lorsqu'elles peuvent en réfléchir une plus grande quantité, que cette substance prend une couleur plus brillante. De même, si nous examinons un chapeau, chaque poil dont le feutre est composé est un petit cylindre qui, vu au microscope, présente une arête blanche, semblable à celle que nous voyons sur un bâton de cire d'Espagne, quand nous le regardons au grand jour; cette arête renvoie donc à notre œil la lumière blanche. Ce que nous venons de dire relativement à ces deux exemples, est vrai de tous les corps de la nature; c'est cette lumière blanche, réfléchie de tous les points visibles, qui détermine essentiellement la teinte de clarté propre à chaque partie de l'objet considéré, parce que les rayons blancs sont les plus complets et les plus vifs de ceux que chaque molécule nous renvoie; ce sont ceux, par conséquent, qui nous font mieux connaître les formes, apprécier l'inclinaison de chaque élément, et la courbure en chaque point de la surface. Nous sommes habitués à cette grande abondance de lumière blanche, et aux services qu'elle nous rend dans la vision; et c'est comparativement à elle qu'en général nous jugeons de la lumière colorée.

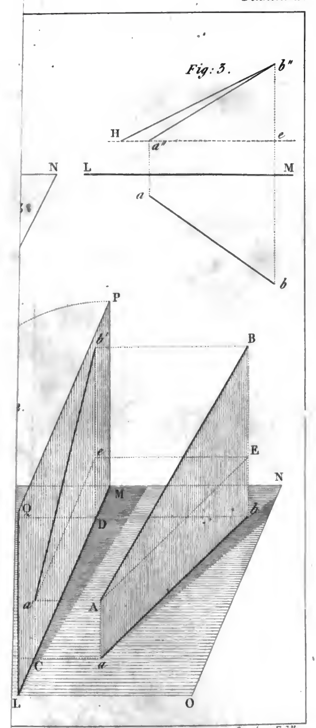
Ceci posé, si les objets ne sont éclairés que par de la lumière déjà colorée, si, comme nous l'avons supposé tout à l'heure, des rideaux ou des vitres rouges donnent cette couleur à toute la lumière que le soleil projette dans un appartement, ce ne sera plus au moyen de la lumière blanche que nous jugerons de la forme des corps, puisque les rayons blancs que chaque point aurait réfléchis, si la lumière n'eût pas été altérée, deviennent alors des rayons rouges. Ces rayons, cependant, sont encore les plus complets et les plus vifs de ceux qui nous parviennent, et quoique notre œil en soit affecté d'une manière différente, il juge cependant par leur secours, comme il l'eût fait à

l'aide des rayons blancs; il est donc conduit naturellement à les regarder comme blancs, et c'est en comparant les autres rayons à ceux-là qu'il apprécie leurs couleurs. On voit, d'après ceci, que s'il se trouve dans l'appartement un corps du même rouge que la lumière dont la pièce est éclairée, cet objet renvoyant des rayons de même nature que ceux que nous jugeons blancs, nous paraitra blanc également. On vérifiera facilement cette expérience, en plaçant un verre rouge devant ses yeux, et en regardant au travers, des objets blancs et des objets rouges; les uns et les autres paraitront de la première de ces couleurs.

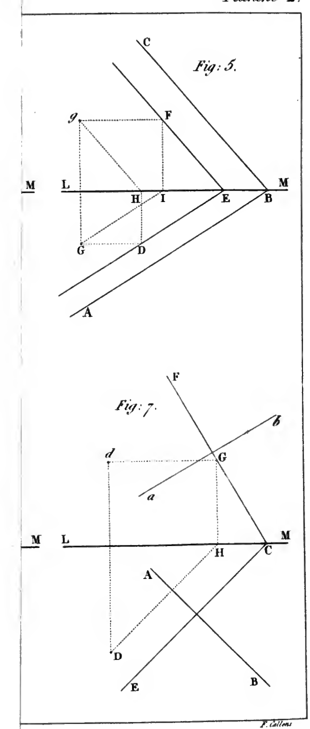
La même cause qui nous détermine à regarder comme blancs des rayons qui ne le sont pas en effet ne nous permet pas d'admettre comme tels ceux qui le sont réellement; et telle est la raison pour laquelle la lumière naturelle du soleil, qui passe à travers une petite ouverture d'un rideau rouge, va porter, sur un papier blanc, une couleur qui nous paraît très sensiblement différente de la couleur blanche.

Les observations précédentes, que nous avons faites en considérant un exemple particulier, sont de nature à être facilement généralisées, et s'étendent à toutes les circonstances où la lumière dont les corps sont éclairés n'est pas telle que celle que nous recevons habituellement du soleil. On sent combien il peut être essentiel quelquefois d'y avoir égard, surtout quand il s'agit de peindre un objet qui ne reçoit que de la lumière réfléchie, ou altérée par les milieux diaphanes qu'elle a traversés. Presque toujours, la lumière qui n'arrive que par réflexion est empreinte de la couleur des corps qui la réfléchissent; cette modification influe sur les apparences que présentent les couleurs de l'objet qu'elle éclaire, et sur le jugement que nous portons de leurs rapports.

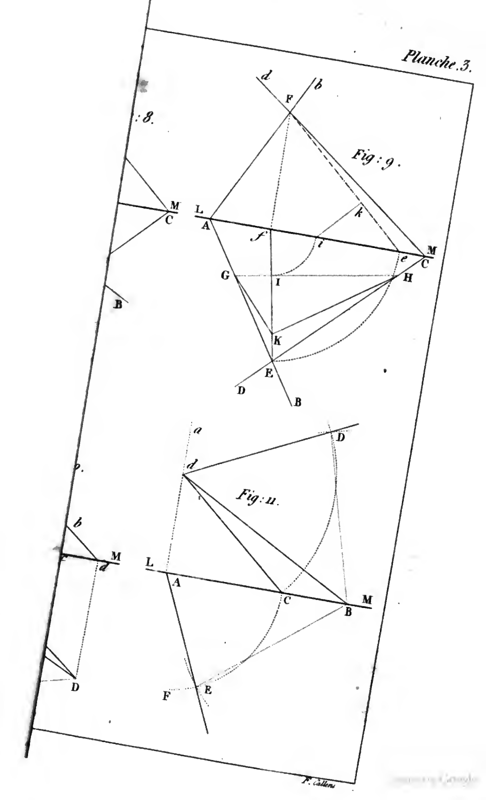
FIN.

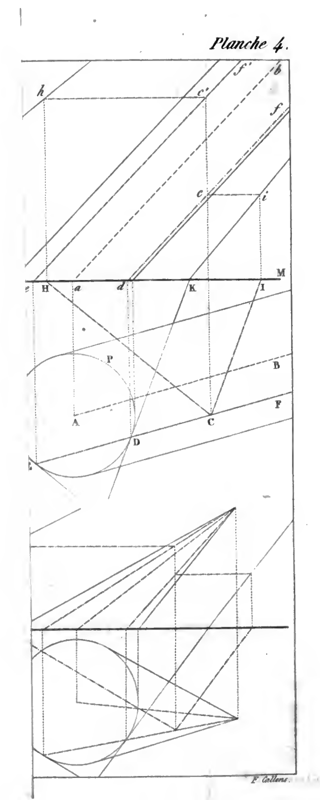


Gravé par F. Callens


Fig: 5.
C
F
g
M
L
H
I
E
B
M
G
D
A
Fig: 7.
F
b
d
G
a
M
L
H
C
M
A
D
E
B
F. Callens




Planche. 3.
:8.
Fig: 9.
d
b
F
k
L
A
f
i
e
M
C
G
I
H
K
E
D
B
M
C
B
a
D
d
Fig: 11.
b
M
d
L
A
C
B
M
D
F
E
F. Callens


h
c'
f'
b
f
c
i
M
H
a
d
K
I
P
B
A
C
F
D
F. Callens.

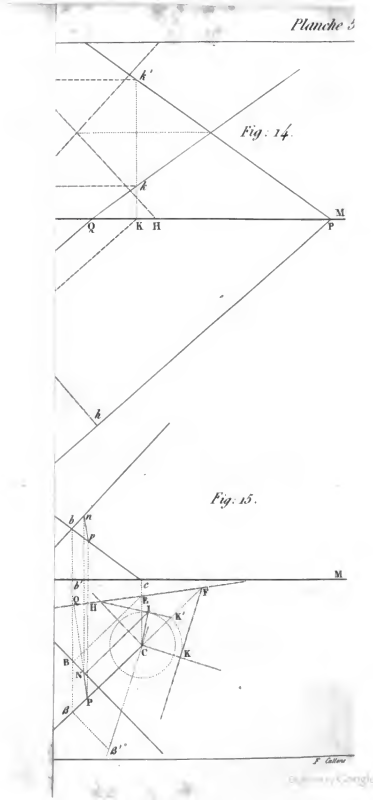
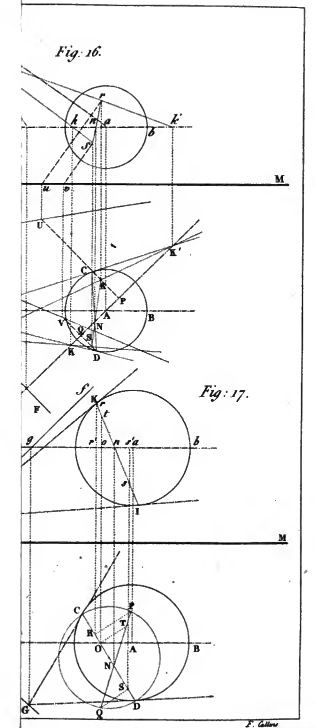
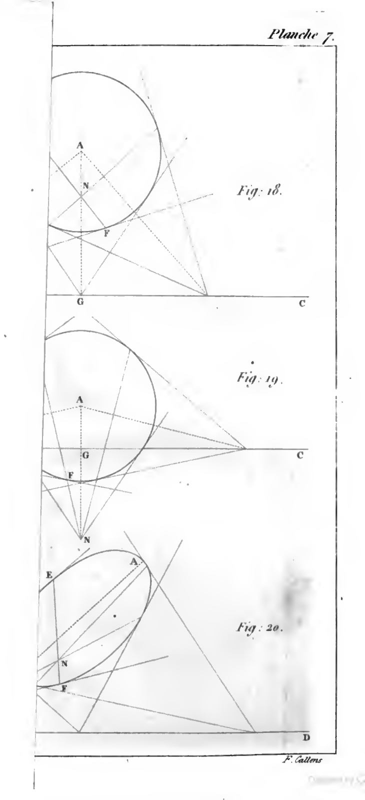
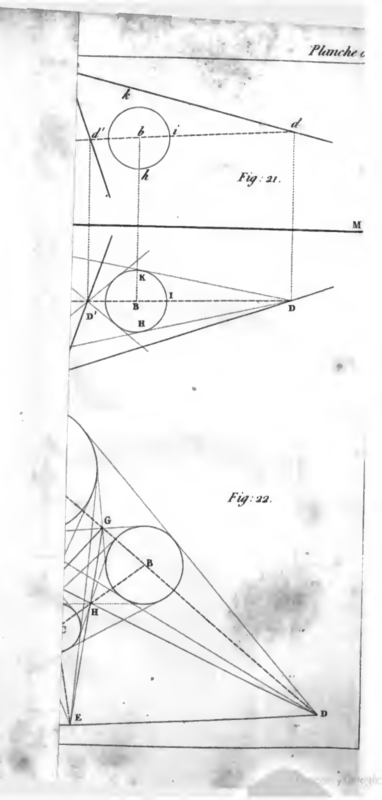

Fig : 14.
k'
k
Q
K
H
M
P
h
Fig: 15.
b
n
p
b'
c
M
Q
H
E
I
F
K'
C
K
B
N
P
β
β'
F. Callens

Planche 6.




A
N
F
G
C
Fig: 18.
A
G
C
F
N
Fig: 19.
A
E
N
F
D
Fig: 20.
F. Callens


k
d'
b
i
d
h
Fig: 21.
M
K
I
B
D'
D
H
Fig: 22.
G
B
H
E
D

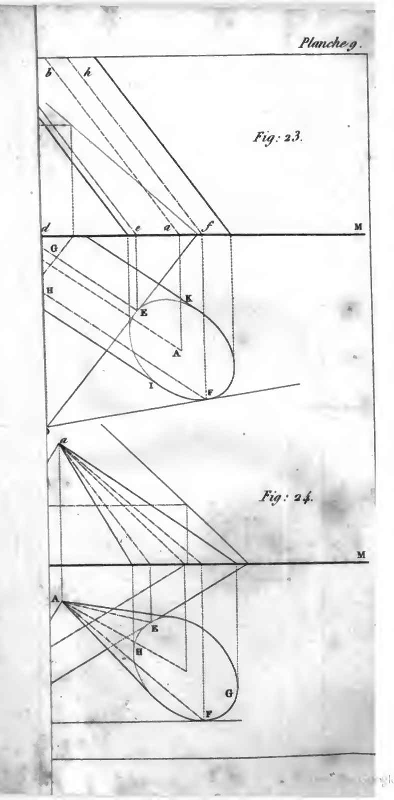
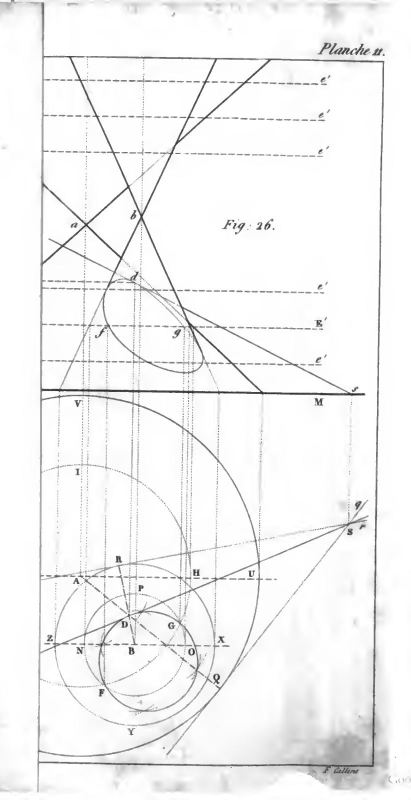
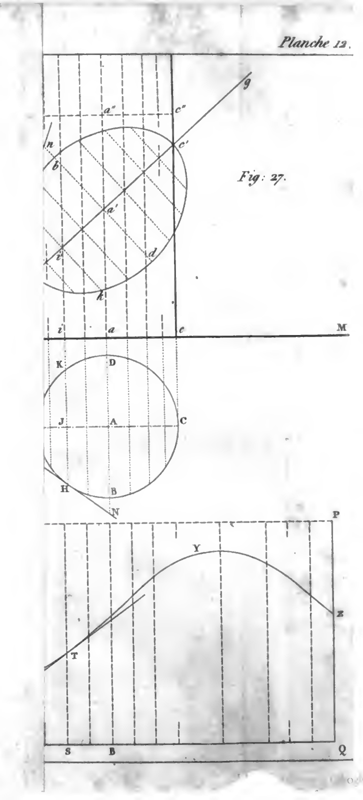

Fig: 23.
b
h
d
e
a
f
M
G
H
K
E
A
I
F
Fig: 24.
a
M
A
E
H
G
F

Fig: 25.

f
n
d
r
g
c
M
C
R
N G
F
H
D




Planche 11.
Fig: 26.
e′
e′
e′
a
b
d
e′
f
g
E′
e′
V
M
I
q
S
R
H
U
A
P
D
G
Z
N
B
O
X
Q
F
Y
F. Callier


Fig: 27.
g
a''
c''
n
c'
b
a'
i'
d
k
i
a
e
M
K
D
J
A
C
H
B
N
P
Y
Z
T
S
B
Q

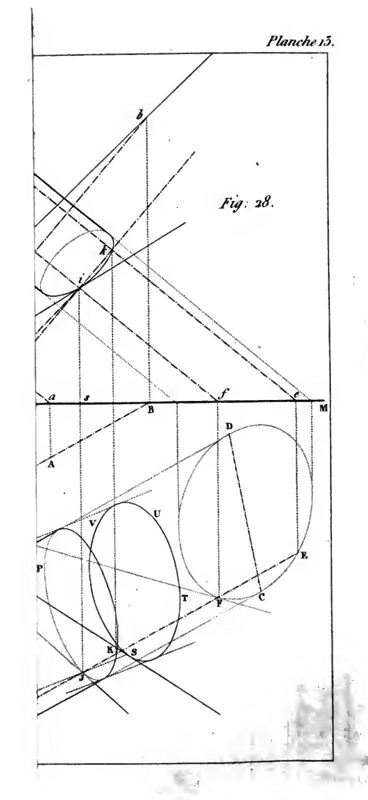
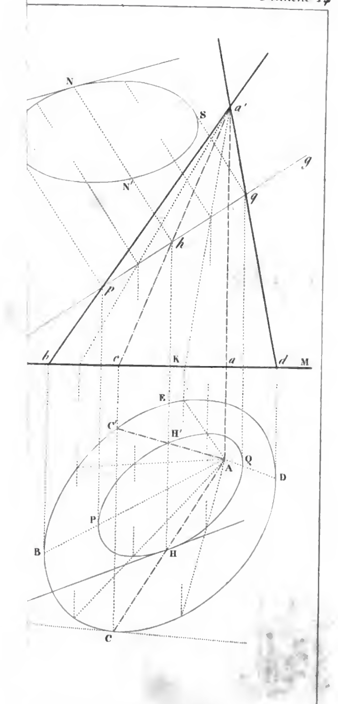
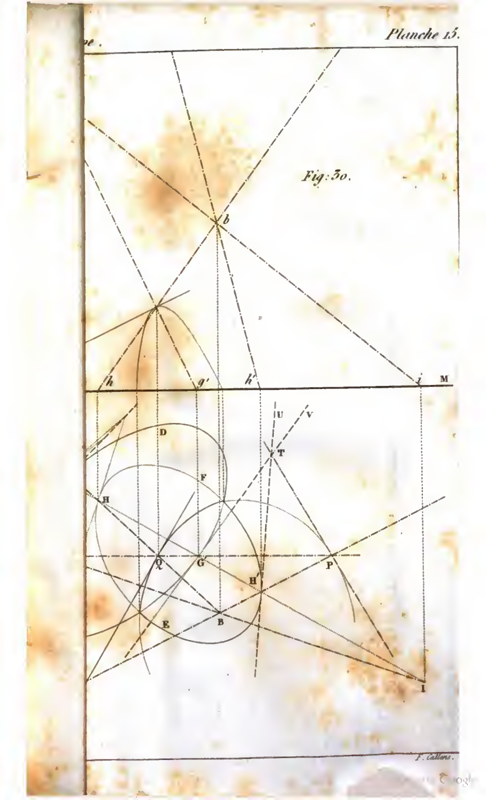
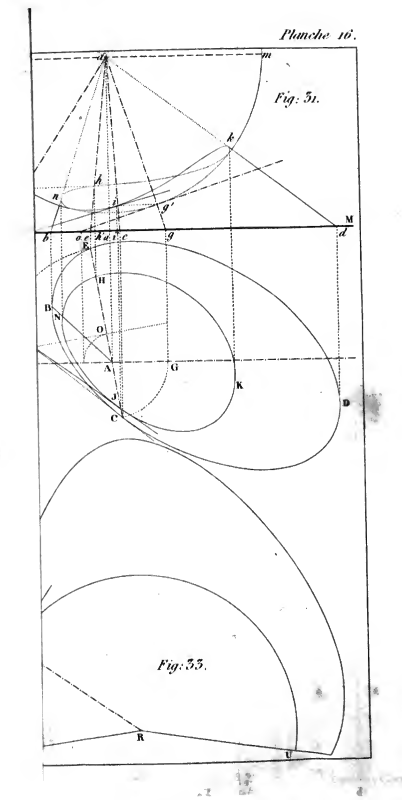
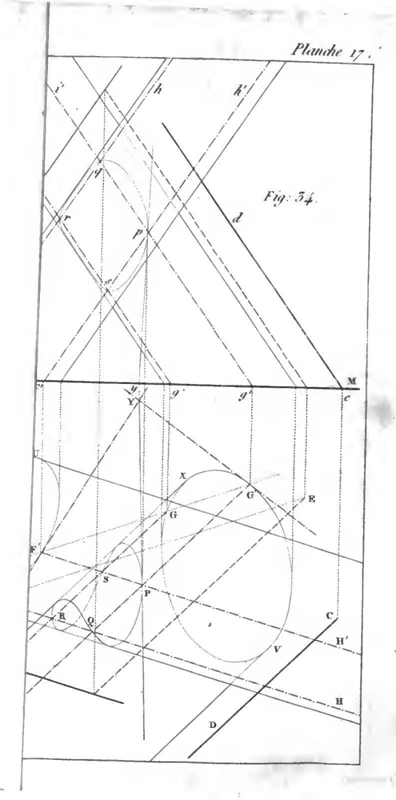

Fig: 28.
b
k
i
a
s
f
e
B
M
A
D
U
V
E
P
T
F
C
K
S
J

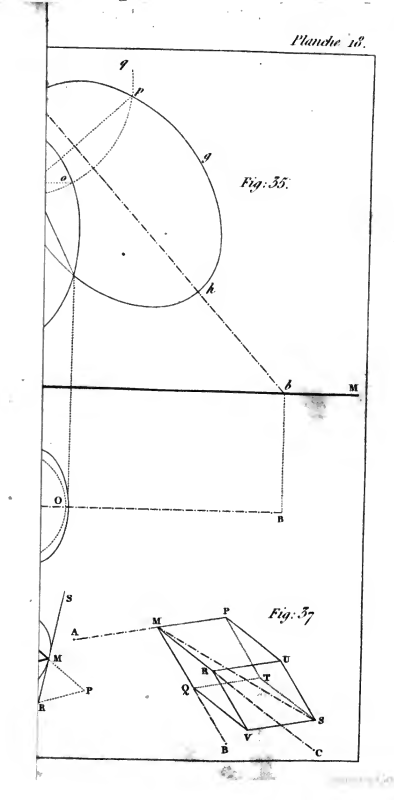
Planche 14




Fig: 30.
b
h
g'
h'
i
M
U
V
D
T
F
H
Q
G
P
H'
E
B
I
F. Callens.


Fig: 31.
a
m
k
h
n
i
g'
M
b
o e h' a' i' c
g
d
E
H
B
N
O
A
G
K
J
D
C
Fig: 33.
R
U


Planche 17.
Fig: 34.
i'
h
h'
q
r
p
s
d
M
y
g
g'
c
Y
U
X
G'
E
G
F'
S
P
R
Q
C
H'
V
H
D


q
p
g
o
Fig: 35.
h
b
M
O
B
S
M
P
R
A
M
P
Fig: 37
U
R
T
Q
S
V
B
C



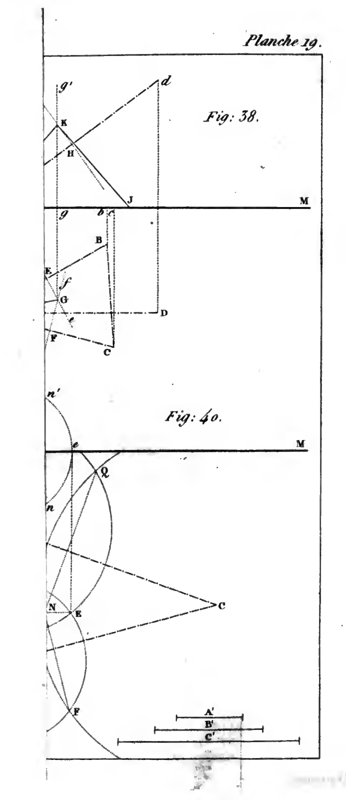
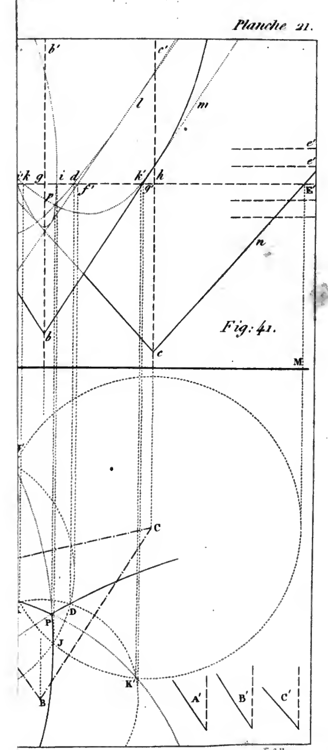
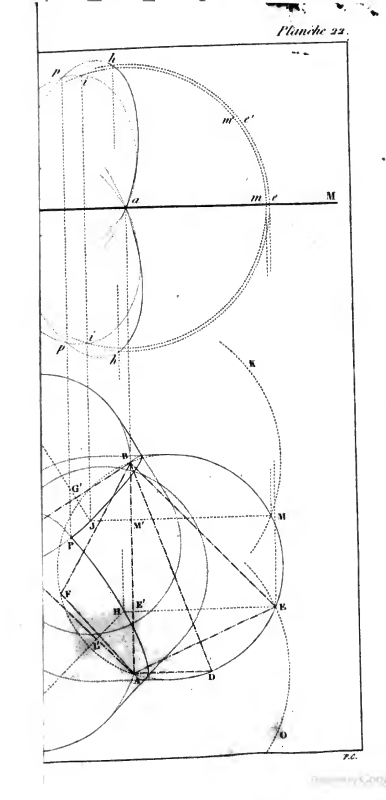
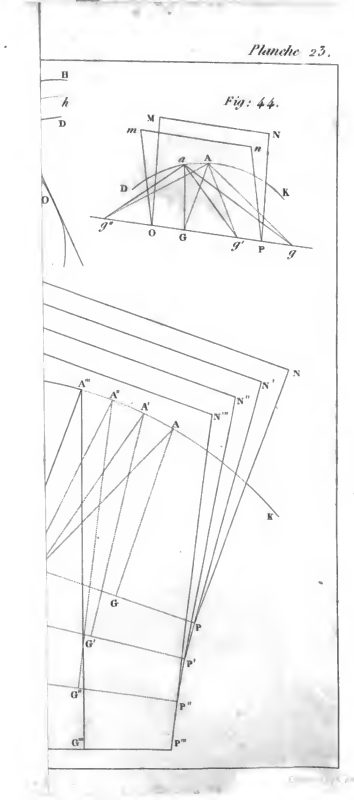


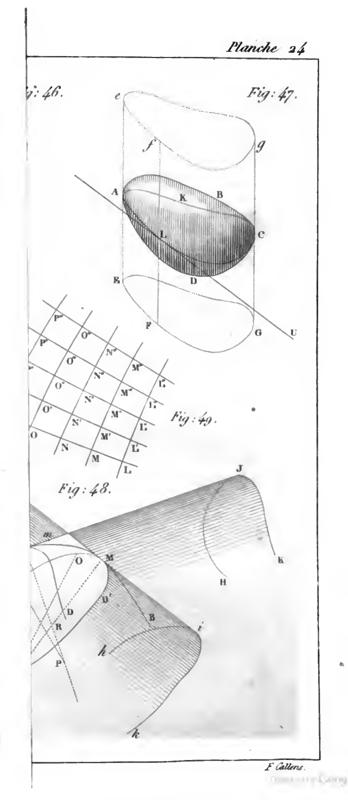
Planche 19.
Fig: 38.
g'
d
K
H
J
M
g
b
c
B
E
f
G
D
e
F
C
Fig: 40.
n'
e
M
Q
n
N
E
C
F
A'
B'
C'

d'
Fig: 39.
q'
q'
M
q
b
d
f
e
i
g
h
c
k
o
i'
h'
k'
n
O
B
G
J
F
Q
D
E
H
C
N


b'
c'
l
m
e'
e'
k
g
i
d
k'
h
f'
g'
E'
p
n
b
c
Fig: 41.
M
C
P
D
J
K'
B
A'
B'
C'
F. Callens


Planche 22.
h
p
i
m'
e'
a
m
e
M
p
i
h
K
B
G'
J
M'
M
P
F
H
E'
E
L'
A
D
O
P.C.


Fig: 44.
H
h
D
O
M
N
m
n
a
A
D
K
g"
O
G
g'
P
g
N
N'
N"
N'''
A'''
A"
A'
A
K
G
P
G'
P'
G"
P"
G'''
P'''


g: 46.
Fig: 47.
e
f
g
A
K
B
L
C
E
D
F
G
U
P''
O''
P'
O'''
N''
M''
O''
N'''
M'''
L''
O'
N''
M''
L''
O'
N'
M'
L''
O
N
M'
L'
N
M
L
Fig: 49.
Fig: 48.
J
m
O
M
K
H
D'
D
B
i
R
h
P
k

F. Callens.

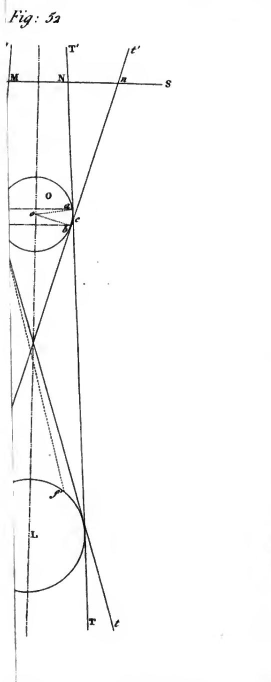
Fig : 50.

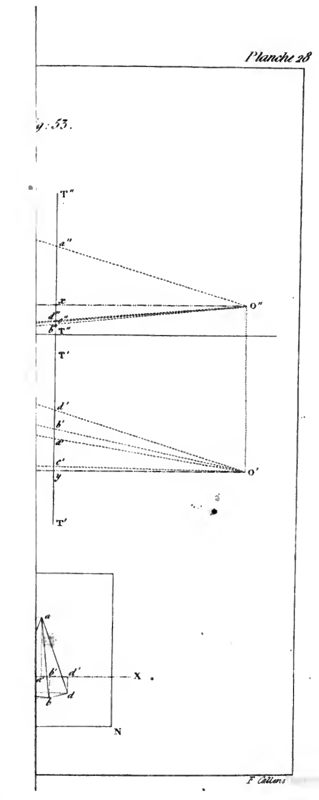
A'
a'
B'
C'
D'
N



Fig: 51.

B'


Fig: 52
T'
t'
M
N
n
S
O
a
o
c
b
f
L
T
t


Planche 28
g: 53.
T"
a"
x
O"
T"
T'
d'
b'
a'
c'
y
O'
T'
a
b'
d'
X
b
d
N
F Callens

